

THÈSE

PRÉSENTÉE

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES-SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Edouard BREZIN

APPLICATIONS DE L'APPROXIMATION CLASSIQUE
EN ELECTRODYNAMIQUE QUANTIQUE

Soutenue le 22 juin 1970 devant la Commission d'Examen

MM. J. YVON

Président

P. MEYER

C. ITZYKSON

Examineurs

THÈSE

PRÉSENTÉE

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES-SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Edouard BREZIN

APPLICATIONS DE L'APPROXIMATION CLASSIQUE
EN ELECTRODYNAMIQUE QUANTIQUE

Soutenue le 22 juin 1970 devant la Commission d'Examen

MM. J. YVON

Président

P. MEYER
C. ITZYKSON

Examineurs

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

PROFESSEURS

Doyen

M. ZAMANSKY

MM. GRASSE	T Evolution des êtres organisés	MM. OLMER	T Energétique générale	MM. NICOLAS	Géologie appliquée
PREVOST	T Chimie organique	GAUTHIER	T Mécanique appliquée	PANIGEL	Biologie générale
WYART	T Minéralogie & cristallographie	BARCHIEWITZ	T Chimie physique	RAVIER	T Pétrographie
TEISSIER	T Zoologie	BROSSEL	T Physique atomique	MOREL F.	T Physiologie comparée
AUGER	T Physique quantique & relativité	BUSER	T Physiologie comparée	ROSEAU	T Mécan. théorique des fluides
MONNIER	T Physiologie générale	CAMUS	T Physiologie végétale	ROUBINE	T Electronique E.S.E.
PIVETEAU	T Paléontologie	CURIEN	T Minéralogie & cristallographie	SILBER	T Chimie CPEM
ROCARD	T Physique E.N.S.	POSSOMPES	T Zoologie	UEBERSFELD	T Electronique
CARTAN	T Mathématiques E.N.S.	PULLMANN	T Chimie quantique	THIRY	T Mécanique céleste
LAFFITTE	T Chimie générale	TEILLAC	T Phys. nucléaire & radioactivité	ABELES	T Physique SPCN
N...	T Géométrie supérieure	VILLE	T Econométrie	AMAT	T Thermodynamique
COULOMB	T Physique du globe	FREYMANN	T Recherches physiques	BALKANSKI	Physique M.P.C.
CRETIEN	T Chimie minérale	ROLLET	T Chimie minérale	LE CORRE	T Electricité
BOCQUET	T Zoologie	JOSIEN	T Chimie SPCN	NATAF	T Physique nucléaire & radio-act.
KASTLER	T Physique E.N.S.	MM. CHEVALLEY	T Géométrie alg. & théo. des groupes	ECHALIER	Biologie animale CPEM
EPHROSSI	T Génétique	GERMAIN	T Mécan. Théo. des fluides	BARRAUD	T Physique CPEM
GAUTHERET	T Biologie végétale CPEM	LUCAS G.	T Géologie	DARS	Géo. structurale & appliquée
LUCAS R.	T Recherches physiques	ALLARD	T Chimie physique	CAMEFORT	Botanique (agréation)
THOMAS A.	T Biologie	BERTHELOT	T Physique des particules fonda.	VICHNIEWSKY	T Mécan. industrielle
MORAND	T Physique enseignement	BRICARD	T Mécanisme	SIGWALT	Chimie SPCN
SOLEILLET	T Physique CPEM	Mme ALBE-FESSARD	T Psycho-physiologie	BLAQUIERE	Automatique
PORTIER	T Mécanisme expérimental des fluides	MM. JULIA	T Etude des molécules nat. com.	BARUCH	Physique propédeutique
DRACH	T Biologie maritime	MAGAT	T Physico-chimie des rayonnements	ARNOUS	T Physique théorique
QUENEY	T Météorologie & dynamique de l'atmosphère	MONOD	T Chimie du métabolisme	SLONINSKI	Génétique
GALLIEN	T Embryologie	BRUN	T Mécanisme des fluides I	MALLIAVIN	T Math. propédeutique
CAUCHOIS	T Chimie Physique	Mme DUBREIL	T Chimie du métabolisme	GAUDEMAR	Chimie propédeutique
MM. THELLIER	T Physique du Globe	Mme LELONG	T Mathématiques II E.N.S.	BROUSSE	T Mécanisme théorique
PONCIN	T Mécanisme générale	MM. BELLAI	T Géologie S.P.C.N.	ROSCHE	T Astronomie
DUBREIL	T Arithmétique & Théorie des nombres	BOUSSIERES	T Thermodynamique & mécan.	GUY	T Physique expérimentale
GAGNIARD	T Géophysique appliquée	MM. COUTURE	Biologie animale CPEM	LAZARD	T Mathématiques MPC
CHAMPETIER	T Chimie macromoléculaire	MM. SCHNELL	T Botanique tropicale	MOREL P.	Physique MPC
CUVILLIER	T Micropaléontologie	STOLKOWSKI	T Physiologie générale	ARSA	Programmation
TRILLAT	T Microscopie & diffraction électronique	ACHER	T Chimie biologique	LEFEBVRE	T Chimie MPC
WIEMANN	T Chimie organique & structurale	BAUDOUIN	T Biologie animale CPEM	BOK	Physique fondamentale
VASSY	T Physique de l'atmosphère	BEAUMONT	T Biologie animale SPCN	CHAPEVILLE	Biochimie
DESTOUCHES	T Théorie physique	BLAMONT	T Géophysique ionosphère	BENOIT	Physique CPEM
AMIEL	T Chimie générale	BOUREAU	T Botanique	RIOT	Chimie CPEM
MATHIEU J.P.	T Physique optique	CURIE D.	T Physique MGP	JAUSEIN	Géologie ENS
COUTEAUX	T Cytologie	DURAND DELGA	T Géologie	PREVOST G.	Biologie cellulaire
CHOQUET	T Théorie des fonctions & topologie	HELLER	T Physiologie végétale	FAYARD P.	Biologie animale CPEM
FELDMANN	T Biologie végétale marine	TORTROT	T Calcul des probabilités	Mme CHARNIAUX-COTTON	Evol. des êtres organisés
JOST	T Physiologie comparée	CAILLEUX	T Géologie SPCN	Mme PICINI	Chimie CPEM
PORTET	T Calcul des probabilités & physique math.	MAGNAN	T Physique électricité	MM. LEQUEUX	Astronomie
SCHWARTZ	T Calcul différentiel & intégral	DAUDEL	T Mécanisme ondulatoire	COHEN TANNODJI	Physique atomique
CHOUARD	T Physiologie végétale	CHOQUET	T Mécanisme analytique et	HERVE	T Mathématiques
MALAVARD	T Aviation (technique aéronautique)	BRUHAT	mécanisme céleste	Mme PECKER-WIMEL	Physique
BRELOT	T Analyse supérieure	Mme VEIL	T Physiologie générale	MM. TAVERNIER	T Astrophysique
EICHORN	T Botanique	MM. LWOFF	T Microbiologie	DURAND M.	Biologie animale SPCN
BENARD	T Chimie appliquée	SIESTRUCK	T Mécan. Phys. et expérimentale	PASCAUD	Physiologie
DIGUE	T Statistique mathématique	CABANNES	T Mécanisme théorique	Mme PETIT	Biologie animale CPEM
SOULAIRAC	T Psychophysique	CAIRE	T Géo. phys. & géo. dynamique	MM. CAGNAC	Electricité
ULRICH	T Physiologie végétale appliquée	COMOLET	T Mécanisme des fluides	FALK-VAIRANT	Physique nucléaire
KIRRMANN	T Théories chimiques	DELLOUE	T Mécanisme des fluides	KRASNER	T Mathématiques
CHADEFAUD	T Botanique	HOUILLOIN	T Biologie animale	BENZECRI	T Statistiques
MM. LE BRETON	T Physiologie de la nutrition	OLIVIER	T Anthropologie	VINH MAU	Physique M.G.P.
MM. LELONG	T Application de l'analyse à la géométrie	SAMUEL	T Math. (ENS jeunes filles)	DUQUESNES	Physique CPEM
DEVILLERS	T Anatomie comparée	DE POSSEL	T Analyse numérique	SCHUTZENBERGER	T Programation
EHRESMANN	T Topologie algébrique	CHARLOT	T Chimie analytique	TREMILLON	Chimie MPC
FRANCON	T Physique SPCN	CHATELET	T Chimie CPEM	FAYARD	Chimie MPC
CLANGEAUD	T Géographie physique, géologie dynamique	MATTLER	T Physique SPCN	BUVET	Chimie CPEM
GODEMENT	T Mathématiques MGP	AUBOUIN	T Géologie	AUTHIER	Minér. et cristallographie
PISOT	T Technique mathématiques de la physique	Mme BENOIT-GEUTAL	T Phys. nucléaire & radio-act.	BONNEFILLE	Electrotechnique
ROCH	T Géologie	MM. BOUGIS	Bio. vég. marine Villefranche s/mer	Mme PUISEUX DAO	Biologie végétale
SCHATZMANN	T Astrophysique	RIGAUDY	T Chimie SPCN	M. BERGER	Géométrie supérieure
TERMIER	T Géologie générale	COLLONGUES	T Chimie appliquée	Mme LIBERNANN	T Mathématiques
ZAMANSKY	T Mathématiques générales	DUBERT	Biochimie	MM. DEDONDER	T Biologie cellulaire
LENNUIER	T Physique M.G.P.	NOZIERES	T Chimie fondamentale	DUFODUR	T Electronique I.U.T.
ROUTHIER	T Géologie appliquée	CADOT	Chimie organique	SCHAAL	Chimie CPEM
Mme TONNELAT	T Physique théorique	IVANOFF	Zoologie	BAUCHOT	Anatomie comparée
MM. DIXMIER	T Mathématiques M.P.C.	FRANÇOIS	Océanographie physique	LANCÉ	BV CPEM
SOUGHAY	T Chimie générale	TALBOT	Génie chimique	GIRAUD	Botanique E.N.S.
AIGRAIN	T Electrotechnique	Mme NOUGAREDE	Botanique	HULIN	Physique PC
BRUSSET	T Chimie systématique	MM. BRUHAT	T Mathématiques MPC	VIGIER	Génétique
LEVY	T Physique théorique des hautes énergies	FOURNET	Electricité générale	GUERN	Biologie végétale
Mme CHAIX	T Chimie biologique	DEHEUVELS	T Math. propédeutique	SLODZIAN	Physique CPEM
Mme HUREL PY	T Biologie végétale CPEM	FURON	T Géologie SPCN	LACOMBE	Logique mathématique
MM. PANNETIER	T Chimie générale I	Mme GANS	T Géologie	TAVLITZKI	Biologie cellulaire
NORMANT	T Synthèse organique	MM. GENEVES	T Biologie végétale CPEM	ARVIEU	Chimie CPEM
YVON	T Théories physiques	HUPE	T Pétrographie	TAXI	B.A. CPEM
COTTE	T Physique électricité	HOLLANDE	T Biologie générale	COLLENOT	B.A. CPEM
DUBOIS J.E.	T Chimie organique physique	LIONS	T Analyse numérique	BASSELIER	Chimie propédeutique
LAMOTTE	T Zoologie E.N.S.	MAITTE	T Chimie organique	BADOUAL	Electronique I.U.T.

Le Secrétaire Général

R. POUILLAIN



REMERCIEMENTS

Je suis heureux de l'occasion qui m'est ici offerte pour exprimer ma reconnaissance à toute l'équipe du Service de Physique Théorique à laquelle je dois tout.

En premier, je remercie le Professeur Claude BLOCH de son accueil chaleureux au sein de ce service. La formation que j'ai reçue est inséparable de son enseignement et de ses nombreux conseils.

Cette thèse est le résultat d'un travail effectué en commun avec Claude ITZYKSON et, pour une partie, avec Jean ZINN-JUSTIN. Cette collaboration, marquée par l'amitié, a été aussi, en ce qui me concerne, très enrichissante. C'est un plaisir pour moi de leur adresser ici mes plus vifs remerciements.

J'ai beaucoup appris au cours de nombreuses discussions qu'il m'est impossible de toutes citer. Je voudrais, en particulier, mentionner celles que j'ai eues avec Roger BALIAN, qui, au cours de nos contacts quotidiens, m'a donné un véritable enseignement. Qu'il en soit remercié ainsi que Jacques des CLOIZEAUX, Cyrano DE DOMINICIS, Marcel FROISSART et Raymond STORA pour l'aide qu'ils m'ont tous apportée.

Monsieur le Professeur Jacques YVON dont la bienveillance m'a toujours encouragé dans la voie que je suivais a bien voulu patronner cette thèse, et je lui exprime ma gratitude. Je remercie également le Professeur Philippe MEYER d'avoir accepté de faire partie du Jury.

J'ai beaucoup de reconnaissance pour Madame Agnès NGUYEN qui s'est chargée de dactylographier ce texte avec autant de soin que d'efficacité, et pour Madame Madeleine PORNEUF qui m'a aidé de toute sa compétence pour relire et corriger les épreuves.

TABLE DES MATIERES

	<u>Pages</u>
<u>INTRODUCTION</u>	1
I - <u>L'APPROXIMATION CLASSIQUE POUR LE PROBLEME A UN CORPS</u>	6
1) Diffusion par un potentiel	6
2) Comparaison avec la méthode B.K.W.	10
3) Le problème à un corps relativiste	13
II - <u>PROPRIETES ET COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES ECHELLES CROISEES</u>	19
1) Expressions formelles de la série des échelles croisées	20
2) Identité de Ward et invariance de jauge	24
3) Limite statique	30
4) L'approximation eikonale relativiste	35
III - <u>UNE FORMULE DE BALMER RELATIVISTE</u>	44
1) L'atome d'hydrogène non-relativiste	45
2) Equations de Klein-Gordon et Dirac en présence d'un potentiel coulombien	48
3) Etats liés relativistes de deux particules chargées	50
IV - <u>PRODUCTION DE PAIRES PAR UN CHAMP ALTERNATIF DANS LE VIDE</u>	55
1) Introduction	55
2) Rappels théoriques	58
3) Création de paires par un champ constant	76
4) Champ alternatif	79
5) Discussion du résultat	93
<u>APPENDICE</u>	97
Démonstration de deux identités	97
<u>REFERENCES</u>	100

APPLICATIONS DE L'APPROXIMATION CLASSIQUE EN ELECTRODYNAMIQUE QUANTIQUE

INTRODUCTION

Nous avons réuni ici deux études d'électrodynamique quantique. Elles ont en commun de relever toutes deux de l'approximation classique bien qu'au premier abord cela soit surprenant pour chacune d'entre elles. La première concerne certaines corrections relativistes aux énergies de liaison de deux particules chargées^[1]. La seconde a pour objet l'étude d'une non-linéarité du vide, la création de paires de particules de charges opposées sous l'effet d'un champ électromagnétique intense^[2]. En premier lieu nous allons tenter d'expliquer pourquoi et comment l'approximation classique peut être appliquée à ces phénomènes.

1) Il peut paraître bizarre d'aller rechercher les états liés de deux particules à l'aide d'une approximation adaptée à la description de la diffusion à haute énergie et, certes, ce n'est pas dans cette direction que nous avons abordé le problème. En théorie des champs le calcul des états liés reste encore une question assez délicate. La meilleure définition consiste à les associer aux pôles dans la variable d'énergie des amplitudes de diffusion. Il ne reste plus qu'à calculer ces amplitudes et c'est là qu'évidemment les difficultés commencent. La méthode généralement adoptée consiste à ne retenir dans la diffusion de deux particules que les diagrammes qui sont obtenus par l'itération d'un certain noyau deux-irréductible. Alors sans calculer l'amplitude elle-même, on peut écrire pour ses pôles une équation-due à Bethe et Salpeter^[3]. C'est là un procédé systématique qui permet de calculer les niveaux jusqu'à des ordres élevés (c'est ainsi par exemple que très récemment^[4] les termes en $\alpha^6 \log \alpha$ sont venus s'ajouter à la connaissance du positronium). Cependant, nous avons personnellement quelques difficultés à comprendre certaines des étapes de cette méthode. Ainsi, sans même entrer dans les questions délicates de normalisation, l'équation de Bethe et Salpeter n'est pas invariante de jauge (à moins de prendre dans le noyau une somme infinie de termes, mais alors ce n'est plus vraiment une équation) ; il existe, par conséquent, un rapport qui ne nous apparaît pas clairement entre la jauge choisie pour le propagateur du photon et les diagrammes retenus dans le noyau. De plus la limite statique n'est pas très explicite : lorsqu'une des particules devient très lourde, on devrait retrouver une équation à un corps décrivant une diffusion dans un champ statique (avec en plus, si elles

figuraient initialement des corrections radiatives). Enfin, même avec le noyau le plus simple (l'échange d'un photon), il n'est pas question de résoudre explicitement l'équation. On ne conserve d'abord que la partie instantanée du propagateur du photon, puis on prend des fonctions d'onde tirées de la théorie de Breit^[5] tout ce qui vient ensuite est traité perturbativement et toujours au premier ordre. Il existe pourtant des perturbations non analytiques comme l'interaction entre les deux moments magnétiques, responsable de la structure hyperfine, et la notion d'ordre en α n'est plus très apparente, surtout qu'il existe des termes logarithmiques. Voilà beaucoup de critiques, mais il faut bien dire que nous serons incapables non seulement de remédier à tous ces défauts mais même d'atteindre la précision fabuleuse de cette méthode.

Un autre procédé, souvent employé ces derniers temps, consiste à calculer les premiers ordres de la série des perturbations, à les développer en ondes partielles et à les extrapoler par un approximant de Padé chargé de fournir des pôles^[6]. En électrodynamique, cependant, on ne peut pas employer cette méthode. Il existe bien un paramètre petit $\alpha = 1/137$, mais la divergence infra-rouge vient compliquer les choses. Déjà, comme en théorie du potentiel elle est responsable d'une phase indéfiniment oscillante qui rend délicate la définition de ce que l'on appelle amplitude de diffusion pour des particules chargées^[7]. Cette phase ne peut pas être extraite dans un traitement perturbatif. De plus, pour la même raison, le développement en ondes partielles, ordre par ordre n'existe pas c'est donc ailleurs qu'il faut regarder, et nous allons tenter de tirer parti précisément de cette divergence infra-rouge qui précédemment nous gênait. En premier lieu, parce que les calculs sont plus simples et surtout parce que la solution en est exactement connue, nous avons étudié le problème coulombien non-relativiste. Nous commençons par donner au photon une masse, c'est-à-dire qu'en théorie du potentiel, nous allons étudier la limite lorsque μ tend vers zéro de l'amplitude de diffusion par un potentiel de Yukawa attractif de portée $1/\mu$. Nous devons factoriser de cette amplitude une phase qui oscille de plus en plus au fur et à mesure que μ diminue. De plus, dans la direction en avant, l'amplitude de diffusion tend vers l'infini lorsque la portée des forces augmente. Nous commencerons par cumuler ces deux divergences en étudiant la limite de l'amplitude en avant. On trouve alors que chacun des termes de la série de Born diverge comme

$1/\mu^2$ avec un coefficient qui est une intégrale où les fonctions de Green libres ont été linéarisées. Or la résolution de l'équation de Lippmann-Schwinger avec un propagateur linéarisé conduit pour l'amplitude de diffusion à une représentation qui rappelle l'eikonal bien connu en optique ondulatoire. Pour des raisons, maintenant purement heuristiques, nous étudions cette forme pour des transferts non nuls. Une phase infinie se met en facteur et il reste une expression qui coïncide pour des transferts petits avec l'amplitude coulombienne déterminée par une résolution exacte. En particulier nous montrons qu'il existe des pôles en énergie qui reconstituant le spectre de l'atome d'hydrogène. Muni de ces résultats, nous avons profité, pour la généralisation à la diffusion relativiste de deux particules chargées de travaux récents qui montraient que la limite à haute énergie d'une classe de diagrammes de Feynman dont nous allons reparler, engendrait là aussi pour l'amplitude une forme eikonale^[8]. Guidé par les calculs précédents nous sommes conduits à rechercher les pôles de cette limite asymptotique de l'amplitude lorsque la masse du photon tend vers zéro. Nous trouvons ainsi une formule pour les états liés de deux particules chargées de masses quelconques qui décrit quelques corrections relativistes à la formule de Balmer. Lorsque la masse de l'une des particules tend vers l'infini le spectre ainsi déterminé se réduit à celui que l'on tire de l'équation de Dirac d'une particule dans un champ coulombien statique, avec une correction de structure hyperfine. Dans le cas où les deux masses sont égales, le positronium par exemple, le développement en puissances de α de l'énergie de liaison coïncide jusqu'à l'ordre α^4 avec celui qu'on trouve par la méthode usuelle pour les états singulets^[9]; (en ce qui concerne les états triplets, des effets d'annihilation virtuelle importants n'ont pas été ici considérés).

Nous avons suivi pour l'exposition de ce travail le plan suivant : le chapitre I est consacré à l'étude de l'approximation eikonale pour le problème à un corps (et de son rapport avec une version de la méthode B.K.W. adaptée aux problèmes de diffusion). Nous passons en revue le problème non-relativiste puis étudions successivement les cas relativistes à un corps d'une particule de Klein-Gordon puis de Dirac dans un champ électromagnétique externe. Dans le deuxième chapitre, nous avons établi quelques propriétés intéressantes des diagrammes de Feynman constitués d'échelles croisées. Bien que les seules équations dont nous disposions pour engendrer cette série

soient formelles^[10] (car elles mettent en jeu, ou bien des dérivations fonctionnelles qu'introduisit Schwinger^[11] ou bien une intégrale de chemin de Feynman^[12] avec une intégrale d'action très compliquée), il est possible de montrer avant toute approximation quelques propriétés générales. D'abord, par construction même, l'amplitude est symétrique dans le croisement s, u . On peut ensuite montrer, en établissant des identités de Ward^[13], qu'elle est invariante de jauge. De plus, lorsqu'on fait tendre vers l'infini, l'une des masses, on retrouve l'amplitude de diffusion de la particule légère dans le champ coulombien statique créé par la particule lourde. Enfin, nous montrons comment à haute énergie on retrouve la forme eikonale. Le troisième chapitre exploite les résultats précédents pour en déduire les énergies de liaison électromagnétiques. Après le cas non-relativiste, il nous faut examiner les modifications apportées par les termes de plus courte portée dus au couplage minimal et au moment magnétique de la particule chargée dans le cadre des équations de Klein-Gordon et Dirac. Dans chacun de ces cas, nous montrons qu'on peut se ramener au problème de Schrödinger en modifiant simplement les effets de barrière centrifuge, et en réinterprétant les paramètres. Puis, nous déterminons les pôles de l'approximation eikonale déduite des diagrammes croisés. Enfin nous étudions les différentes limites du spectre ainsi déterminé.

2) Les propriétés de réponse non-linéaire du vide en électrodynamique quantique ont été prédites dès 1930^[14], mais en raison de la petitesse de ces effets elles n'ont pas encore été observées. Le travail présenté dans la deuxième partie (chapitre IV) concerne une réponse non-linéaire absorptive : la création de paires de particules de charges opposées par un champ électromagnétique alternatif dans le vide. Il doit son origine à des questions que nous ont posées par des expérimentateurs disposant de faisceaux laser de grande puissance, sur l'observabilité de cet effet. L'idée est de concentrer dans de petits volumes de grandes densités d'énergie. On peut se demander si, à partir du moment où on a un très grand nombre de photons présents (un nombre de l'ordre de l'énergie à fournir $2mc^2$ divisée par l'énergie d'un photon individuel $\hbar\omega$) ceux-ci ne pourraient pas matérialiser leur énergie sous forme d'une paire. Or le taux de création avait déjà calculé pour un champ statique^[15] et nous pouvons facilement l'estimer pour un champ très faible par la théorie des perturbations. La question était donc de déterminer le rôle de la fréquence du champ pour savoir laquelle de ces deux situations extrêmes gouvernait le

phénomène avec les lasers disponibles ou prévisibles. Il se trouve que sur le plan purement théorique l'exercice est également intéressant car il doit permettre d'interpoler entre le régime statique (ou de champ fort), où la dépendance du taux de création par rapport au champ appliqué est singulière, en $\exp(-1/E)$, (E désignant le champ électrique), et le régime de champ faible où la théorie des perturbations s'applique, et où nous attendons une loi en $(E)^{4mc^2/\hbar\omega}$.

Les résultats théoriques dont nous avons besoin, sont tirés d'une série de travaux dus à J. Schwinger^[15,16]. La deuxième section est consacrée à les rétablir. Nous reprenons ensuite le calcul en champ constant, qui correspond à un modèle exactement soluble. Nous montrons qu'il peut être ramené à la résolution d'un oscillateur harmonique à une dimension. Enfin pour apprécier le rôle de la fréquence nous construisons un modèle, qui grâce à l'existence de deux paramètres petits, peut être formulé comme un problème de diffusion à haute énergie et à une dimension. Cela explique l'introduction de l'approximation classique dans ce problème. Dans une dernière partie nous discutons les résultats numériques et montrons que, d'une part la fréquence ne joue aucun rôle, et que d'autre part les intensités requises sont très supérieures à celles qui sont prévisibles à l'heure actuelle.

I - L'APPROXIMATION CLASSIQUE POUR LE PROBLEME A UN CORPS

L'étude de la limite à haute énergie des amplitudes de diffusion par un potentiel a été entreprise depuis déjà de nombreuses années. Des travaux de Molière^[17], considérablement étendus par Glauber^[18], ont montré que l'amplitude asymptotique prenait une forme, bien connue en optique ondulatoire sous le nom d'eikonale. Ce n'est que très récemment^[8,10] que cette forme fut retrouvée dans le cas relativiste, tant pour la diffusion par un potentiel externe, que pour la diffusion de deux particules. Nous commencerons par rappeler comment on obtient la limite en question pour le problème à un corps non relativiste, en utilisant des méthodes généralisables au cas relativiste. Comme nous avons en vue des applications à l'électrodynamique, nous étudierons les complications introduites par le couplage vectoriel au champ électromagnétique ainsi que les modifications à apporter lorsque la particule chargée a un spin non nul. Nous montrerons, et cela nous servira par la suite, que cette approximation classique est également adaptée à la description de la diffusion d'une particule très lourde.

1 - Diffusion par un potentiel

Plusieurs méthodes peuvent être employées pour arriver au résultat que nous cherchons, mais en fait c'est toujours la même image physique simple qui sert de guide. A haute énergie, la diffusion se fait surtout vers l'avant, et à partir de maintenant nous supposerons toujours les transferts petits. L'approximation classique consiste alors à admettre que les collisions successives qui apparaissent dans un développement perturbatif ne défléchissent pratiquement pas la particule incidente. Bien que cela ne soit pas sur le plan des calculs, la méthode la plus simple, il nous paraît instructif d'exploiter cette idée à l'aide de la formulation de Feynman des intégrales de chemin.

Nous étudions donc la diffusion par un potentiel local $V(r)$. L'amplitude peut être formellement représentée, sur la couche d'énergie

$$2mE = (\vec{p} - \vec{q}/2)^2 = (\vec{p} + \vec{q}/2)^2, \quad (1)$$

par :

$$(\vec{p}+\vec{q}/2 | T | \vec{p}-\vec{q}/2) = \lim (\vec{p}+\vec{q}/2 | (E-P^2/2m) [E-P^2/2m-V(R)+i\epsilon]^{-1} V(R) | \vec{p}-\vec{q}/2) \quad (2)$$

où $\vec{R}$ et $\vec{P}$ désignent les opérateurs canoniques

$$[R_\alpha, P_\beta] = i \delta_{\alpha\beta} \quad , \quad (3)$$

et où le processus limite consiste à compenser le pôle du propagateur pour $2mE = (\vec{p}+\vec{q}/2)^2$ par le zéro du numérateur situé au même endroit. La condition aux limites correspondant à la partie imaginaire du propagateur est contenu dans la représentation intégrale

$$[E-P^2/2m-V(R)+i\epsilon]^{-1} = -i \int_0^\infty dt e^{it[E-P^2/2m-V(R)]} \quad . \quad (4)$$

Nous savons que la méthode de Feynman consiste à remplacer les éléments de matrice dans l'espace de configuration de l'opérateur d'évolution par l'intégrale fonctionnelle

$$\langle \vec{r}_2 | e^{-it[P^2/2m+V(R)]} | \vec{r}_1 \rangle = \int_{\vec{r}_1,0}^{\vec{r}_2,t} \mathcal{D}\vec{r}(\tau) \exp i \int_0^t d\tau \left[\frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2(\tau) - V(\vec{r}(\tau)) \right] \quad , \quad (5)$$

où l'intégrale porte sur tous les chemins issus de $\vec{r}_1$ au temps 0 aboutissant en $\vec{r}_2$ au temps t . La seule propriété que nous retiendrons de la mesure $\mathcal{D}\vec{r}(\tau)$ est sa normalisation donnée par le problème libre

$$\int \mathcal{D}\vec{r}(\tau) \exp i \int_0^t d\tau \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2(\tau) = \langle \vec{r}_2 | e^{-itP^2/2m} | \vec{r}_1 \rangle = e^{-3i\pi/4} \left(\frac{m}{2\pi t} \right)^{3/2} \exp \frac{im(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)^2}{2t} \quad (6)$$

A haute énergie les trajectoires classiques se rapprochent de lignes droites, et c'est pourquoi, conformément à ce que nous décrivions ci-dessus nous ne retiendrons dans (5) que les trajectoires linéaires, parcourues de surcroît selon un horaire uniforme :

$$\vec{r}(\tau) = \vec{r}_1 + \frac{\tau}{t}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \quad . \quad (7)$$

Le terme potentiel devient alors une simple phase constante qui sort de l'intégrale fonctionnelle (5), que nous calculons alors comme il est indiqué en (6).

La suite des calculs ne présente plus de difficulté et nous conduit à l'expression eikonale

$$\langle \vec{p}+\vec{q}/2 | T_E | \vec{p}-\vec{q}/2 \rangle = \frac{i p}{m} \int \frac{d^2 b}{(2\pi)^3} e^{-i \vec{q} \cdot \vec{b}} \left\{ \exp \left[-i \int_{-\infty}^{+\infty} V(\vec{r} + \frac{\vec{p} t}{m}) dt \right] - 1 \right\} \quad (8)$$

où le "paramètre d'impact" $\vec{b}$ désigne les deux composantes de $\vec{r}$ orthogonales à $\vec{p}$.

Abarbanel et Itzykson [10] ont systématisé l'approximation (7) en évitant de parler d'intégrales de chemin, ce qui conduit à des calculs nettement plus simples. Repartant de l'expression (4) pour le propagateur, ils représentent l'opérateur d'évolution par la série de Dyson si bien que formellement on arrive à :

$$[E - P^2/2m - V(R) + i\epsilon]^{-1} = -i \int_0^\infty dt e^{it [E - P^2/2m]} T \exp \left[-i \int_0^t d\tau V^I[R(\tau)] \right] \quad (9)$$

où le symbole T désigne le produit chronologique et V^I le potentiel en représentation d'interaction :

$$V^I[R(\tau)] = e^{i\tau P^2/2m} V(R) e^{-i\tau P^2/2m} = V(\vec{R} + \frac{\vec{P}}{m} \tau) .$$

L'amplitude (2) elle-même s'exprime comme

$$(\vec{p}+\vec{q}/2 | T | \vec{p}-\vec{q}/2) = \left(\vec{p}+\vec{q}/2 | T \exp \left[-i \int_0^\infty dt V(\vec{R} + \vec{P}t/m) \right] V(R) | \vec{p}-\vec{q}/2 \right) . \quad (10)$$

Cette représentation (10) n'est qu'une écriture compacte de la série des perturbations. La méthode d'A. et I. consiste maintenant à supposer, parallèlement à ce qui était fait en (7), que l'opérateur $\vec{P}$ dans (10) est un nombre - c comme si l'impulsion était une constante du mouvement. Tous les opérateurs contenus dans la série de Dyson commutent après ce remplacement et on peut donc tout simplement resommer la série en enlevant de l'expression (10) le symbole T -produit. Quant à l'opérateur $\vec{P}$, nous pouvons le remplacer par l'une quelconque des impulsions initiale, finale ou intermédiaire. Dans la direction en avant, ces diverses possibilités coïncident, et pour de petits transferts

elles conduisent à des expressions voisines. Nous choisirons de remplacer $\vec{P}$ par $\vec{p}$, moyenne des impulsions initiale et finale, par simple raison de symétrie. Nous en tirons immédiatement l'expression (8).

En fait ce processus revient à linéariser le propagateur libre. Montrons cela plus explicitement car nous retrouverons des calculs analogues dans le cas du problème coulombien. Dans l'équation de Lippmann-Schwinger

$$(\vec{p}+\vec{q}|T(p^2/2m)|\vec{p}) = v(\vec{q}) - 2m \int \frac{d^3k}{(\vec{p}+\vec{k})^2 - p^2 - i\epsilon} v(\vec{q}-\vec{k}) (\vec{p}+\vec{k}|T|\vec{p}) ,$$

où $v(\vec{q})$ est la transformée de Fourier du potentiel

$$v(\vec{q}) = \int \frac{d^3r}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} V(r) ,$$

nous négligeons dans le propagateur le terme en k^2 devant $\vec{p}\cdot\vec{k}$, ce qui est toujours la même hypothèse de déflexion faible et de haute énergie. Ce propagateur est alors l'inverse d'un opérateur différentiel du premier ordre, ce qui indique que nous sommes en mesure de résoudre dans ce cas l'équation intégrale

$$T_E(\vec{p},\vec{q}) = v(\vec{q}) - m \int \frac{d^3k}{\vec{p}\cdot\vec{k} - i\epsilon} v(\vec{q}-\vec{k}) T_E(\vec{p},\vec{k}) .$$

Cette équation se résout par transformation de Fourier : la fonction

$$\mathcal{T}(\vec{p},\vec{r}) = \int d^3q e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} T_E(\vec{p},\vec{q})$$

satisfait

$$\mathcal{T}(\vec{p},\vec{r}) = V(r) - \frac{im}{p} V(r) \int_{-\infty}^z dz' \mathcal{T}(\vec{p},\vec{b},z')$$

où l'axe z a été choisi le long de $\vec{p}$, et $\vec{b}$ désigne les deux composantes de $\vec{r}$ orthogonales à $\vec{p}$. On déduit de là aisément, une équation différentielle du premier ordre dont la solution est :

$$\mathcal{T}(\vec{p}, \vec{r}) = V(r) \exp\left[-\frac{im}{p} \int_{-\infty}^z V(\vec{b}, z') dz'\right] .$$

Revenons à $T_E(\vec{p}, \vec{q})$:

$$T^E(\vec{p}, \vec{q}) = \int \frac{d^2b}{(2\pi)^3} dz e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}} \frac{ip}{m} \frac{d}{dz} \left\{ \exp\left[-\frac{im}{p} \int_{-\infty}^z V(\vec{b}, z') dz'\right] - 1 \right\} .$$

Sur la couche d'énergie, vers l'avant $\vec{p} \cdot \vec{q} \simeq 0$, on peut alors intégrer sur z , et on retrouve ainsi l'expression (8).

Les méthodes que nous venons de rappeler sont susceptibles également de fournir un développement systématique. Ainsi au lieu de remplacer l'opérateur $\vec{P}$ par le nombre $\vec{p}$ on développe $\vec{P}$ en puissances de $(\vec{P}-\vec{p})$. De même on peut développer la fonction de Green libre en puissances de k^2 . Le terme suivant ainsi obtenu est dû à Saxon et Schiff^[19], mais nous n'aborderons pas ici l'évaluation de ces corrections^[20], dont nous n'aurons pas besoin. Leur calcul explicite est d'ailleurs fort compliqué. Par contre nous allons comparer cette forme eikonale avec une autre approximation bien connue adaptée à la limite classique : la méthode B.K.W. .

2 - Comparaison avec la méthode B.K.W.

Nous allons présenter ici cette méthode sous une forme adaptée aux problèmes de diffusion et qui nous sera utile dans la dernière partie pour le calcul de la création de paires. Pour cette même raison nous n'étudierons que le cas à une dimension, mais la méthode exposée est aisément transposable au cas à trois dimensions.

Soit donc le problème de diffusion décrit par l'équation de Schrödinger

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + k^2 - V(x) \right] \psi(x) = 0 \quad (\hbar^2/2m = 1) \quad , \quad (11)$$

et les conditions aux limites

$$\begin{cases} x \rightarrow -\infty & \psi(x) \sim e^{ikx} + b e^{-ikx} \\ x \rightarrow +\infty & \psi(x) \sim a e^{ikx} \end{cases} . \quad (12)$$

La matrice de diffusion sur la couche d'énergie est liée à a et b de l'équation (12) par

$$\begin{cases} (k|T|k) = \frac{ik}{\pi} (a-1) \\ (-k|T|k) = \frac{ik}{\pi} b \end{cases} \quad (13)$$

Définissons le nombre d'onde variable

$$k(x) = [k^2 - V(x)]^{1/2} \quad (14)$$

et nous plaçant à haute énergie, où $k^2 - V(x)$ reste positif, il n'y a pas lieu de distinguer plusieurs régions. De plus $k(x)$ devient lentement variable, nous reviendrons dans un instant sur ce point de façon précise, si bien qu'il est indiqué de chercher la fonction d'onde sous la forme

$$\begin{cases} \psi(x) = \alpha(x) e^{i\chi(x)} + \beta(x) e^{-i\chi(x)} \\ \chi(x) = \int_0^x dy k(y) \end{cases} \quad (15)$$

Les conditions aux limites (12) s'écrivent maintenant

$$\alpha(-\infty) = 1, \quad \beta(+\infty) = 0, \quad (12')$$

et les paramètres a et b sont reliés aux fonctions α et β par

$$\begin{cases} a = \alpha(+\infty) \exp \left[i \int_{-\infty}^{+\infty} dx [k(x) - k] \right] \\ b = \beta(-\infty) \exp \left[2i \int_{-\infty}^0 dx [k(x) - k] \right] \end{cases} \quad (16)$$

Si nous imposons entre les deux fonctions inconnues α et β la relation

$$\frac{d\alpha}{dx} e^{i\chi} + \frac{d\beta}{dx} e^{-i\chi} = 0, \quad ,$$

nous pouvons remplacer l'équation de Schrödinger par

$$\begin{cases} \alpha'(x) = -\frac{k'(x)}{2k(x)} \left[\alpha(x) - e^{-2i\chi(x)} \beta(x) \right] \\ \beta'(x) = -\frac{k'(x)}{2k(x)} \left[-e^{+2i\chi(x)} \alpha(x) + \beta(x) \right] \end{cases} \quad (17)$$

Le système (24) avec les conditions (12') est équivalent au problème initial. Lorsque $|x| \rightarrow \infty$, $k'(x)$ s'annule de sorte que $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ tendent vers des constantes. Leur vitesse de variation est caractérisée par le rapport $\left| \frac{k'(x)}{k(x)} \right| = \frac{1}{k^2(x)} \left| \frac{dV}{dx} \right|$. La variation de la phase dépend elle de $\chi'(x) = k(x)$. Nous nous plaçons dans les conditions où

$$\left| \frac{dV}{dx} \right| \ll \left[k^2 - V(x) \right]^{3/2},$$

si bien que les termes en $e^{\pm 2i\chi(x)}$ dans (17) oscillent très rapidement par rapport aux variations de α et β , et que l'approximation d'ordre le plus bas consistera à les négliger. On trouve alors

$$\begin{cases} \alpha^{(0)}(x) = \left[1 - V(x)/k^2 \right]^{-1/4} \\ \beta^{(0)}(x) = 0 \end{cases} \quad (18)$$

Des relations (13) et (16), nous tirons en définitive

$$\begin{cases} \langle k | T | k \rangle = \frac{ik}{\pi} \left\{ \exp \left[i \int_{-\infty}^{+\infty} dx (\sqrt{k^2 - V(x)} - k) \right] - 1 \right\} \\ \langle -k | T | k \rangle = 0 \end{cases} \quad (19)$$

A cette approximation l'amplitude en arrière s'annule à haute énergie. Quant à la diffusion en avant, lorsque nous remplaçons $(\sqrt{k^2 - V})$ par le premier terme de son développement pour k grand: $-V/2k$, nous retrouvons l'expression de l'eikonale (8), à cela près qu'à une dimension il n'y a pas, bien entendu, d'intégrale sur le paramètre d'impact. Nous voyons donc, sur ces formules, que l'eikonale est une forme approchée de ce que donne B.K.W. .

Nous reviendrons ultérieurement sur le système (17) car nous aurons besoin d'une résolution plus fine que (18). En effet la méthode adoptée ici est susceptible d'un développement systématique. A la différence de la méthode B.K.W. usuelle, grâce à l'utilisation de deux fonctions inconnues, les résultats sont ici adaptés directement à la description d'un processus de diffusion.

3 - Le problème à un corps relativiste

Pour une particule scalaire, couplée à un champ extérieur scalaire, il n'y a aucune difficulté particulière à transposer ce qui précède. Cependant, en vue des applications à l'électrodynamique, il nous faut aborder tout de suite les complications entraînées par la nature vectorielle du couplage au champ électromagnétique ; nous examinerons successivement le cas des particules scalaires, puis celui des particules de spin 1/2.

a) Particule de Klein-Gordon

Examinons pour commencer la diffusion d'une particule scalaire par un champ dérivant du quadripotential $A_\mu(x)$.

L'amplitude sur la couche de masse,

$$(p+q/2)^2 = (p-q/2)^2 = m^2 \quad (20)$$

s'écrit

$$(p+q/2 | T(A) | p-q/2) = \lim (p+q/2 | (P^2 - m^2) [P^2 - m^2 - U + i\epsilon]^{-1} U | p-q/2) \quad , \quad (21)$$

où nous avons appelé U l'opérateur défini par

$$[P - e A(X)]^2 \equiv P^2 - U$$

c'est-à-dire

$$U = e \{ P^\mu, A_\mu(X) \} - e^2 A^2(X) \quad . \quad (22)$$

Dans toutes ces formules X_μ et P_ν désignent les opérateurs canoniquement conjugués avec

$$[X_\mu, P_\nu] = i g_{\mu\nu} \quad . \quad (23)$$

Dorénavant nous utiliserons le système naturel d'unités où $\hbar=c=1$. La méthode à suivre est tout-à-fait semblable dans ce cas, mais mérite peut-être quelques commentaires.

La représentation du propagateur

$$[P^2 - m^2 - U + i\epsilon]^{-1} = -i \int_0^\infty dt e^{it(P^2 - m^2 - U)} \quad (24)$$

fut introduite par Schwinger¹⁵ pour traiter la renormalisation dans le cas du couplage à un champ externe de façon invariante à la fois par le groupe de Lorentz et les transformations de jauge. Ce procédé fut ensuite généralisé pour des Lagrangiens arbitraires. Il est à noter que le paramètre t , analogue à un "temps propre" a les dimensions du carré d'un temps. Nous pourrions écrire pour les éléments de matrice de l'opérateur (24) une intégrale de chemin, comme d'ailleurs le fit Feynman, pour traiter l'équation de Klein-Gordon^[21]. Les chemins dans l'espace de MinKovski sont alors décrits en fonction de ce cinquième paramètre t . Nous pourrions de nouveau ne retenir que les chemins linéaires, mais nous savons qu'il est équivalent et plus bref de suivre Abarbanel et Itzykson c'est-à-dire que, de façon encore exacte, nous écrivons partant de la série de Dyson construite pour l'opérateur d'évolution apparaissant en (24)

$$(p+q/2 | T | p-q/2) = \left(p+q/2 | T \left(\exp -i \int_0^\infty dt U(X-2pt, p) \right) U(X, P) | p-q/2 \right) . \quad (25)$$

On remplace maintenant P opérateur par p , si bien que nous remplaçons l'amplitude exacte par l'amplitude eikonale

$$(p+q/2 | T_E | p-q/2) = \int \frac{d^4 x}{(2\pi)^4} e^{-iqx} e^{-i \int_0^\infty dt U(x-2pt, p)} U(x, p) \quad (26)$$

où

$$U(x,p) = 2e \cdot p \cdot A(x) - e^2 A^2(x) \quad .$$

En réalité nous négligerons le terme en A^2 , car d'une part il n'a pas le facteur p du premier terme, d'autre part les termes en "seagull" ne contribuent pas à la singularité dominante des amplitudes de diffusion de particules chargées vers l'avant. Si bien que nous retiendrons en définitive

$$(p+q/2 | T_E(A) | p-q/2) = \int \frac{d^4 x}{(2\pi)^4} e^{-iq \cdot x} \left(\frac{1}{i} \frac{d}{d\alpha} \exp \left[-2ie \int_{\alpha}^{\infty} dt \cdot p \cdot A(x-2pt) \right] \right)_{\alpha=0} \quad .(27)$$

Limite statique

Pendant le processus de diffusion une particule très lourde est à peine défléchie ; il n'est donc pas surprenant, et nous allons effectivement montrer, que l'on retrouve bien dans ce cas la forme eikonale. La limite de masse infinie sera prise de la façon suivante : on pose $p = \lambda n$ où n est un quadri-vecteur fixe, orthogonal à q d'après (20), normalisé à $n^2 = 1$. La condition de couche de masse est ainsi $m^2 = \lambda^2 + q^2/4$. La limite sera donc prise en faisant croître λ , à q fixé. Une transformation unitaire simple nous donne :

$$\begin{aligned} (p+q/2 | T(A) | p-q/2) &= (n+q/2 | e^{-i(\lambda-1)n \cdot X} T(A) e^{i(\lambda-1)n \cdot X} | n-q/2) \\ &= (n+q/2 | T \cdot \exp \left[-i \int_0^{\infty} dt \cdot U \left(X-2t [P+(\lambda-1)n], P+(\lambda-1)n \right) \right] U(X, P+(\lambda-1)n) | n-q/2) \quad . \end{aligned}$$

Il est alors naturel pour λ grand de négliger P devant $(\lambda-1)n$, c'est-à-dire de remplacer l'opérateur $P+(\lambda-1)n$ par le nombre-cp :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (p+q/2 | T(A) | p-q/2) = 2im \int \frac{d^4 x}{(2\pi)^4} e^{-iqx} \delta(x \cdot n) \left\{ \exp \left[-\frac{i}{2m} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \cdot U(x+nt, p) \right] - 1 \right\} \quad .(28)$$

L'interaction apparaît sous la forme :

$$\frac{1}{m} U(x,p) = \frac{2ep \cdot A(x)}{m} - \frac{e^2 A^2(x)}{m} \quad ,$$

le premier terme reste fini puisque p^2 est voisin de m^2 ,

et le terme en A^2 s'élimine donc dans la limite $m \rightarrow \infty$. Il est facile de voir que (28) coïncide bien avec (27).

b) Particules de Dirac

Nous allons commencer par montrer que de façon générale sur la couche de masse, on peut mettre l'amplitude de Dirac sous une forme analogue à (21). Partons encore de

$$(p-q/2 | T(A) | p+q/2) = \lim \bar{u}(p+q/2) (\not{p}-m) (\not{p}-e \not{A}(X)-m+i\epsilon)^{-1} e \not{A} u(p-q/2). \quad (29)$$

Nous rationalisons de manière habituelle le propagateur et définissons l'opérateur U par

$$(\not{p}-e \not{A})^2 - m^2 = \not{p}^2 - m^2 - U, \quad ,$$

soit,

$$U = e \{ p^\mu, A_\mu \} - e^2 A^2 - \frac{e}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (30)$$

où
$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

Ainsi

$$(p-q/2 | T(A) | p+q/2) = \frac{1}{2m} \bar{u}(p+q/2) (\not{p}^2 - m^2) (\not{p}^2 - m^2 - U + i\epsilon)^{-1} (\not{p} - e \not{A} + m) e \not{A} u(p-q/2)$$

et grâce à l'équation de Dirac nous avons la suite d'égalités

$$(\not{p} - e \not{A} + m) e \not{A} u(p-q/2) = -(\not{p} - e \not{A} + m) (\not{p} - e \not{A} - m) u(p-q/2) = -(\not{p}^2 - m^2 - U) u(p-q/2) = U u(p-q/2).$$

En définitive nous obtenons

$$(p-q/2 | T(A) | p+q/2) = \frac{1}{2m} \bar{u}(p+q/2) (\not{p}^2 - m^2) (\not{p}^2 - m^2 - U + i\epsilon)^{-1} U u(p-q/2) \quad (31)$$

c'est-à-dire un formalisme à deux composantes puisque dans la représentation des matrices de Dirac

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & -\vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad (32)$$

le terme

$$\frac{1}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma}(\vec{H}-i\vec{E}) & 0 \\ 0 & \vec{\sigma}(\vec{H}+i\vec{E}) \end{pmatrix} \quad (33)$$

ne comporte pas de couplage entre les deux premières et deux dernières composantes. Ce résultat n'est valable que sur la couche de masse ; il ne s'applique pas à la fonction de Green.

Remarque : Cette réduction à deux composantes des amplitudes semble pouvoir être faite très généralement. Si, par exemple, nous considérons le couplage à un champ extérieur pseudo-scalaire nous avons de même

$$(\not{P}-m-i\gamma_5 A(X)+i\epsilon)^{-1} i\gamma_5 A(X) u(p) = (P^2-m^2-U+i\epsilon)^{-1} (\not{P}-i\gamma_5 A(X)+m) i\gamma_5 A(X) u(p)$$

où
$$U = -\gamma_5 \not{\partial} A(X) + A^2(X)$$

et sur la couche de masse

$$(\not{P}-i\gamma_5 A(X)+m) i\gamma_5 A(X) u(p) = -(\not{P}-i\gamma_5 A(X)+m) (\not{P}-m-i\gamma_5 A(X) u(p) = -(P^2-m^2-U) u(p) = U u(p).$$

Dans ce cas encore on peut écrire une expression semblable

$$(p-q/2 | T(A) | p+q/2) = \frac{1}{2m} \bar{u}(p-q/2) (P^2-m^2) (P^2-m^2-U+i\epsilon)^{-1} U u(p+q/2) .$$

La forme (31) de l'amplitude se prête à la même algèbre que son analogue (21) du cas scalaire, et de même qu'en (25) nous avons sans approximation

$$(p+q/2 | T(A) | p-q/2) = \bar{u}(p+q/2) T e^{-i \int_0^\infty dt U(X-2Pt, P)} U(X, P) u(p-q/2) \quad , \quad (34)$$

mais le T-produit dans (34) est imposé à la fois par la non-commutation de l'impulsion et de la position d'une part, et des matrices de Dirac d'autre part. Le remplacement de P par un scalaire, ne permet donc pas de supprimer le T-produit dans (34), à moins que nous ne négligions dans U le terme magnétique $\sigma.F$ en plus du terme en A^2 comme nous le faisons précédemment. Pour les problèmes de diffusion à haute énergie, l'amplitude de spin-flip s'annule vers l'avant, et pour l'amplitude sans spin-flip nous négligerons le terme en $\sigma.F$. Cependant il sera important d'en conserver une partie dans la limite statique prise comme précédemment.

L'interaction apparaît sous la forme

$$\frac{1}{m} U(x, p) = \frac{2ep.A(x)}{m} - \frac{e^2 A^2(x)}{m} - \frac{e}{2m} \sigma.F \quad .$$

Là encore le terme en A^2/m disparaît. Cependant, lorsque $m \rightarrow \infty$, on peut considérer que la dynamique du spin de la particule ne s'élimine pas totalement ; nous remplacerons alors le rapport $e/2m$ par le moment magnétique $\mu=e/2m(1+\chi)$ de la particule et nous conserverons le terme $\mu\sigma F$ dans la limite statique. Dans le même esprit que ce qui précède nous négligerons la non-commutation des matrices de Dirac et les termes σ^{ok} de $\sigma^{\mu\gamma}$ qui ont une valeur moyenne nulle entre spineurs au repos. Ceci revient à dire que nous traitons le spin au premier ordre et que nous montons en exponentielle le terme correspondant. Dans la limite statique nous aurons en définitive dans le référentiel où le quadri-vecteur p est pris comme axe des temps :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (p+q/2 | T(A) | p-q/2) = i \int \frac{d^3x}{(2\pi)^4} e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}} \quad (35)$$

$$\left\{ \exp \left[-i \int_{-\infty}^{+\infty} dt [e A^0(\vec{x}, t) - \mu \vec{\sigma} \cdot \vec{H}(\vec{x}, t)] \right] - 1 \right\} \quad .$$

II - PROPRIETES ET COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES ECHELLES CROISEES

Dans ce chapitre, nous allons étudier la classe de diagrammes de Feynman de l'électrodynamique quantique, constituée des "échelles croisées". C'est-à-dire que dans la diffusion de deux particules chargées, au lieu de retenir à l'ordre n un seul graphe, nous tenterons d'inclure les $n!$ graphes obtenus en croisant de toutes les façons possibles, les lignes de photons qui vont d'une particule à l'autre (Fig. 1).



Fig.1

Ces diagrammes ne comportent pas de self-interactions, et nous verrons que la théorie qui s'en déduit présente des analogies avec celle de Feynman et Wheeler^[22], qui étudiaient l'électrodynamique classique en termes d'une intégrale d'action ne comportant que des interactions directes entre particules.

Ces échelles croisées comportent un certain nombre de propriétés attrayantes, que n'ont pas par exemple les échelles simples. Citons :

- i) L'invariance de jauge maintenue à toutes les étapes.
- ii) Un comportement correct lorsqu'une des particules chargées est très lourde. Dans cette limite, on retrouve comme il se doit, le développement en série des perturbations de l'amplitude correspondant à un problème relativiste à un corps dans un champ extérieur.
- iii) A haute énergie enfin, il a été remarqué récemment que la forme eikonale s'obtient par une resommation approximative sur laquelle nous reviendrons. Ces différentes questions seront explicitées au cours de ce chapitre.
- iv) De plus, par construction même, la symétrie de croisement déduite du renversement d'une des lignes de fermions (symétrie "s-u") est respectée.

Cependant, le prix à payer est important car nous ne connaissons pas d'équation réellement "utile", susceptible d'engendrer cette série de diagrammes. En particulier, elle n'est certainement pas solution d'une équation de Bethe-Salpeter avec un noyau s'exprimant en termes finis : en effet une telle équation engendre un nombre de diagrammes qui croît comme une puissance de l'ordre de la série des perturbations, et non comme une factorielle. Tout ce dont nous disposons, c'est d'une équation formelle en termes de dérivées fonctionnelles, ou bien d'une formulation en intégrale de chemins, mais avec un Lagrangien dépendant de deux temps comme celui de Feynman et Wheeler [22]. Néanmoins, nous montrerons dans le chapitre suivant que la resommation approximative de cette série conduit à des fonctions de Green à quatre points ayant des propriétés intéressantes.

1 - Expressions formelles de la série des échelles croisées

La technique des dérivées fonctionnelles développée par Schwinger [11] va nous être ici utile.

Considérons d'abord la diffusion de deux particules sans spin, de masses m_1 et m_2 , échangeant des "barreaux croisés" correspondant à un boson de masse μ . La somme de la série pour l'amplitude de diffusion de la figure 1 s'exprime par [10]:

$$\begin{aligned}
 & - \frac{i}{(2\pi)^4} \delta^{(4)}(p'_1 + p'_2 - p_1 - p_2) \langle p'_1 p'_2 | T | p_1 p_2 \rangle = \\
 & = \lim_{\substack{p_1^2 \rightarrow m_1^2 \\ p_2^2 \rightarrow m_2^2}} (p_1'^2 - m_1^2)(p_1^2 - m_1^2)(p_2'^2 - m_2^2)(p_2^2 - m_2^2) \mathcal{N} \langle p'_1 | G_1(A_1) | p_1 \rangle \langle p'_2 | G_2(A_2) | p_2 \rangle \Big|_{A_1=A_2=0}
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Dans la formule (1) $G_i(A)$ est la fonction de Green d'une particule sans spin dans le champ extérieur (scalaire) $A(X)$:

$$G_i(A) = \left[P^2 - m_i^2 - A(X) + i\epsilon \right]^{-1}
 \tag{2}$$

(où P et X sont les opérateurs habituels $[P_\mu, X_\nu] = -i g_{\mu\nu}$).

$\mathcal{K}$ est un opérateur "d'entrelacement" exprimant l'échange d'un boson de masse μ :

$$\mathcal{K} = \exp \iint d^4x_1 d^4x_2 \frac{\delta}{\delta A_1(x_1)} D(x_1 - x_2) \frac{\delta}{\delta A_2(x_2)} \quad (3)$$

où on a appelé $D(x)$ le propagateur de Feynman :

$$D(x) = \frac{ig^2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k e^{-ik \cdot x}}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} \quad (4)$$

La formule (1) n'est qu'une expression compacte de la série des échelles croisées. Pour la comprendre, le mieux est d'ailleurs d'imaginer qu'on développe $\mathcal{K}$; à l'ordre n on doit dériver n fois chacune des deux fonctions de Green dans leurs champs respectifs. Comme, en fin de compte, on annule A_1 et A_2 , cela implique qu'on ne retient dans cette dérivation que le n -ième ordre, à la fois dans $G_1(A_1)$ et $G_2(A_2)$. Les dérivations engendrent au total les $n!$ graphes croisés, mais comptés chacun $n!$ fois. Pour compenser ce poids on voit donc qu'il est nécessaire que $\mathcal{K}$ soit une exponentielle.

Examinons maintenant l'intégrale de chemin associée à (1). Pour cela nous commençons, comme au chapitre I, à représenter les éléments de matrice des propagateurs dans l'espace de configuration sous la forme :

$$\langle x'_1 | G_1(A) | x_1 \rangle = -i \int_0^\infty dt e^{-itm_1^2 t} \int_{x_1}^{x'_1} \mathcal{D}x(\tau) \exp -i \int_0^t d\tau \left[\frac{\dot{x}^2}{4}(\tau) + A(x(\tau)) \right] \quad (5)$$

Il suffit maintenant d'utiliser la formule de "Taylor" fonctionnelle

$$\exp \left[\int d^4X B(X) \frac{\delta}{\delta A(X)} \right] \cdot \Phi(A) \Big|_{A=0} = \Phi(B)$$

pour écrire

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{K} \langle x'_1 | G(A) | x_1 \rangle \langle x'_2 | G(A') | x_2 \rangle \Big|_{A=A'=0} = \\
 & = - \int_0^\infty dt_1 e^{-it_1 m_1^2} \int_0^\infty dt e^{-it_2 m_2^2} \int_{0, x_1}^{t_1, x'_1} \mathcal{D} x_1(\tau_1) \int_{0, x_2}^{t_2, x'_2} \mathcal{D} x_2(\tau_2) \\
 & \exp \left\{ -i \int_0^{t_1} d\tau_1 \frac{\dot{x}_1^2(\tau)}{4} - i \int_0^{t_2} d\tau_2 \frac{\dot{x}_2^2(\tau)}{4} - \int_0^{t_1} d\tau_1 \int_0^{t_2} d\tau_2 D[x_1(\tau_1) - x_2(\tau_2)] \right\} \quad (6)
 \end{aligned}$$

On retrouve dans l'exposant une intégrale d'action à deux "temps", ne contenant que des actions directes entre particules.

A la différence du traitement classique de Feynman et Wheeler l'interaction se fait par l'intermédiaire de la fonction $D(X)$, alors que classiquement apparaissait la partie imaginaire de D dans la limite où $\mu \rightarrow 0$, i.e. $\delta(x^2)$. Le fait qu'ici D ne soit pas imaginaire pur, traduit la possibilité quantique d'effets absorbatifs. De plus, dans cette version quantique, il faut évidemment intégrer sur tous les chemins possibles. La complexité du problème classique de deux particules chargées en interaction, nous montre qu'il n'est pas possible de calculer exactement l'intégrale fonctionnelle (5).

Une dernière possibilité consiste à écrire une suite infinie d'équations couplées, la première relie la fonction à quatre points des échelles croisées à la même fonction avec émission en plus d'un photon ; la seconde équation fait intervenir l'émission de deux photons, etc... Ce système dans sa version infinie n'a évidemment aucune utilité mais il se prête à des découplages. On pourrait par exemple, essayer l'approximation qui consiste à remplacer la fonction de Green avec émission de deux photons, par le produit de deux fonctions avec émission d'un seul photon ; nous n'avons pas exploré cette possibilité. Indiquons ici simplement la première équation de la séquence :

$$\begin{aligned}
 & \left[-i \gamma_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^\mu - m \right] G(x_1 x_2 ; x'_1 x'_2) = \delta(x_1 - x'_1) \left(x_2 \left| \frac{1}{p_2 - m_2 + i\epsilon} \right| x'_2 \right) \\
 & + \int dy_2 \gamma_\mu D^{\mu\nu}(x_1 - y_2) G_\nu(x_1 x_2 ; x'_1 x'_2 ; y_2) \quad ,
 \end{aligned}$$

$$\text{où} \quad G_\nu(x_1 x_2 ; x'_1 x'_2 ; y_2) = \mathcal{K} \frac{\delta}{\delta A^\nu(y_2)} (x_1 | G(A_1) | x'_1) (x_2 | G(A_2) | x'_2) \quad A_1 = A_2 = 0$$

désigne la fonction à 5 points avec émission d'un photon réel.

Revenons maintenant à la formule initiale (1) pour prendre explicitement les limites indiquées mettant les particules externes sur la couche de masse. Il suffit pour cela de faire apparaître au lieu des propagateurs $G(A)$, les opérateurs de diffusion $T(A)$ définis par

$$G(A) = (P^2 - m^2)^{-1} + (P^2 - m^2)^{-1} T(A) (P^2 - m^2)^{-1},$$

pour écrire

$$\begin{aligned} & - \frac{i}{(2\pi)^4} \delta^{(4)}(q_1 - q_2) (p_1 + q_1/2, p_2 - q_2/2 | T | p_1 - q_1/2, p_2 + q_2/2) = \\ & = \mathcal{K}(p_1 + q_1/2 | T_1(A_1) | p_1 - q_1/2) (p_2 - q_2/2 | T_2(A_2) | p_2 - q_2/2) \Big|_{A_1=A_2=0}. \end{aligned} \quad (7)$$

Jusqu'à présent pour simplifier nous n'avons considéré que des particules sans spin et des couplages scalaires. Examinons les modifications apportées par le caractère vectoriel du champ électromagnétique. La formule (7) reste valable en redéfinissant de façon convenable les amplitudes $T(A)$ et l'opérateur d'entrelacement $\mathcal{K}$; aux équations (3) et (4) il convient de substituer :

$$\mathcal{K} = \exp \iint d^4x_1 d^4x_2 \frac{\delta}{\delta A_1^\mu(x_1)} D^{\mu\nu}(x_1 - x_2) \frac{\delta}{\delta A_2^\nu(x_2)},$$

où le propagateur du photon est pris dans une jauge arbitraire

$$D^{\mu\nu}(x) = - \frac{i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4q}{q^2 + i\epsilon} e^{iq \cdot x} \left(g^{\mu\nu} + q^\mu n^\nu(q) + n^\mu(q) q^\nu + q^\mu q^\nu f(q) \right). \quad (8)$$

Nous reviendrons dans le paragraphe suivant sur ces problèmes de jauge.

Quant aux amplitudes $T(A)$ il faut distinguer quelque peu entre bosons et fermions chargés,

Pour des particules scalaires on a

$$G(A) = (P - eA)^2 - m^2 + i\epsilon, \quad ,$$

c'est-à-dire que $T(A)$ est donné par les formules (I.21) et (I.25), i.e. :

$$(p' | T(A) | p) = (p' | T \cdot \exp \left[-i \int_0^\infty U(X - 2P\tau, P) d\tau \right] U(X, P) | p)$$

$$U(X, P) = e(P \cdot A(X) + A(X) \cdot P) - e^2 A^2(X) \quad . \quad (I.25)$$

On peut vérifier que la formule (7) engendre bien alors les règles de Feynmann.

Pour des particules de Dirac on a le choix entre deux façons d'exprimer les amplitudes $T(A)$. La première est celle qui découle directement des règles de Feynman c'est-à-dire que $T(A)$ est construit comme solution de l'équation :

$$T(A) = eA + eA(\not{P} - m + i\epsilon)^{-1} T(A) \quad .$$

On peut aussi utiliser l'équivalence que nous avons montrée au cours du chapitre précédent, avec la théorie à deux composantes où l'on utilise des propagateurs de particules scalaires pour exprimer $T(A)$ par la formule (I.25). Il suffit pour cela d'ajouter au $U(X, P)$ précédent le terme $-\frac{e}{2} \sigma \cdot F$ (Eq. (I.30)), décrivant la dynamique du spin de la particule dans le champ extérieur.

2 - "Identité de Ward" et invariance de jauge

Nous allons maintenant montrer que la somme des échelles croisées est invariante de jauge. Comme nous le verrons cette propriété n'existe que sur la couche de masse ; elle ne s'applique pas à la fonction de Green à quatre points correspondante. Disons ici de façon précise ce que nous entendons par invariance de jauge, dans le cas présent. Dans la formule (7), il faut utiliser dans l'opération $\mathcal{K}$, le propagateur du photon :

$$D^{\mu\nu} = - \frac{i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q}{q^2 + i\epsilon} e^{iqx} \Lambda^{\mu\nu}(q)$$

où nous avons appelé $\Lambda^{\mu\nu}(q)$ la fonction où interviennent tous les arbitraires de jauge, à savoir

$$\Lambda^{\mu\nu} \equiv g^{\mu\nu} + q^\mu n^\nu(q) + n^\mu(q) q^\nu + q^\mu q^\nu f(q) \quad . \quad (9)$$

Dans la définition (9) les fonctions $n^\mu(q)$ et $f(q)$ n'ont pas été précisées ; citons les choix de jauge les plus courants :

- i) $f(q) = 0$, $n^\mu(q) = 0$ jauge de Lorentz
- ii) $f(q) = - \frac{1}{q^2}$, $n^\mu(q) = 0$ jauge transverse ou de Landau
- iii) $f(q) = \frac{1}{(q.n)^2}$, $n^\mu(q) = - \frac{n^\mu}{q.n}$ jauge de radiation, n est un vecteur fixe du genre temps
- iv) $f(q) = \frac{2}{q^2}$, $n^\mu(q) = 0$ jauge de Yennie.

Nous allons montrer que l'amplitude (7) est indépendante des fonctions $n^\mu(q)$ et $f(q)$: la contribution calculée avec le $\Lambda^{\mu\nu}$ général de la formule (9) est égale à celle que l'on obtient pour $\Lambda^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$.

La démonstration s'inspire d'un argument présenté par Feynman pour montrer que l'amplitude avec émission d'un photon a une divergence nulle. Nous commencerons par établir des "identités de Ward" liées à la conservation du courant, et pour traiter un cas un peu moins familier, nous supposerons les particules chargées scalaires.

A partir de la fonction de Green dans un champ externe :

$$G(A) = \left[(P - eA(X))^2 - m^2 + i\epsilon \right]^{-1} ,$$

nous construisons l'opérateur courant $J^\mu(q; A)$

$$J^\mu(q;A) = \frac{\delta}{\delta \tilde{A}_\mu(q)} G(A) = e G(A) \left[P^\mu - e A^\mu(X), e^{iq \cdot X} \right]_+ G(A) . \quad (10)$$

Dans cette définition $\tilde{A}_\mu(q)$ désigne la transformée de Fourier de $A(x)$:

$$\tilde{A}_\mu(q) = \int e^{-iqx} A_\mu(x) \frac{d^4x}{(2\pi)^4} ,$$

et dans la suite de ce paragraphe les symboles $[,]_-$ et $[,]_+$ désigneront respectivement le commutateur et l'anticommutateur. Démontrons maintenant "l'identité de Ward" :

$$q_\mu J^\mu(q;A) = e \left[e^{iq \cdot X}, G(A) \right]_- . \quad (11)$$

En effet de la définition (10) nous tirons :

$$q \cdot J(q;A) = e G(A) \left[P \cdot q - e A \cdot q, e^{iq \cdot X} \right]_+ G(A) .$$

Cet anticommutateur se met simplement sous forme d'un commutateur

$$\left[P \cdot q - e A(X) \cdot q, e^{iq \cdot X} \right]_+ = \left[G^{-1}(A), e^{iq \cdot X} \right]_- ,$$

d'où résulte l'identité (11) puisque

$$q \cdot J(q;A) = e G(A) \left[G^{-1}(A), e^{iq \cdot X} \right]_- G(A) = e \left[e^{iq \cdot X}, G(A) \right]_- .$$

Plus généralement, définissant

$$J^{\mu_1, \mu_2, \dots} (q_1, q_2, \dots ; A) = \frac{\delta}{\delta \tilde{A}_{\mu_1}(q_1)} \frac{\delta}{\delta \tilde{A}_{\mu_2}(q_2)} \dots G(A) , \quad (12)$$

la même démonstration conduit à :

$$q_{1\mu_1} J^{\mu_1, \mu_2, \dots} (q_1, q_2, \dots ; A) = e \left[e^{iq_1 \cdot X}, J^{\mu_2, \dots} (q_2, \dots ; A) \right]_- . \quad (13)$$

Appliquons ces résultats à la somme des termes d'ordre n de l'amplitude de diffusion sur la couche de masse. La dérivation n -ième contenue dans le développement de l'opérateur $\mathcal{K}$ de l'équation (7) construit le produit de deux courants d'ordre n en champ nul, définis en (12). Explicitement :

$$(p_1+q/2, p_2-q/2 | T^{(n)} | p_1-q/2, p_2+q/2) = \lim \left[(p_1-q/2)^2 - m_1^2 \right] \left[(p_1+q/2)^2 - m_1^2 \right] .$$

$$\left[(p_2-q/2)^2 - m_2^2 \right] \left[(p_2+q/2)^2 - m_2^2 \right] \int \frac{d^4 q_1 \dots d^4 q_n}{(q_1^2 + i\epsilon) \dots (q_n^2 + i\epsilon)} \delta^{(4)} \left(\sum q_i - q \right) \times$$

$$(p_1-q/2 | J_1^{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n} (q_1, \dots, q_n; 0) | p_1+q/2)$$

$$\Lambda_{\mu_1 \nu_1} (q_1) \dots \Lambda_{\mu_n \nu_n} (q_n) (p_2+q/2 | J_2^{\nu_1, \dots, \nu_n} (q_1, \dots, q_n; 0) | p_2-q/2) . \quad (14)$$

Développons le produit des Λ sous la forme

$$\Lambda_{\mu_1 \nu_1} (q_1) \dots \Lambda_{\mu_n \nu_n} (q_n) = g_{\mu_1 \nu_1} \dots g_{\mu_n \nu_n} + \sum ,$$

où les différents termes contenus dans $\sum$ comprennent au minimum soit un facteur $q_i^{\mu_i}$, soit $q_i^{\nu_i}$. Pour tous les termes de $\sum$ on peut donc, d'une façon au moins, utiliser l'identité (13) soit avec un opérateur J_1 soit avec un opérateur J_2 . Pour fixer les idées, supposons que nous choisissons dans $\sum$ un terme contenant en facteur $q_1^{\mu_1}$. On a alors, appliquant (13)

$$(p_1-q/2 | q_1^{\mu_1} J_1^{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n} (q_1, q_2, \dots; 0) | p_1+q/2)$$

$$= e(p_1-q/2 | e^{iq_1 \cdot X} J_1^{\mu_2, \dots} (q_2, \dots; 0) - J_1^{\mu_2, \dots} (q_2, \dots; 0) e^{iq_1 \cdot X} | p_1+q/2)$$

$$= e(p_1-q/2-q_1 | J_1^{\mu_2, \dots} (q_2, \dots; 0) | p_1+q/2) - e(p_1-q/2 | J_1^{\mu_2, \dots} (q_2, \dots; 0) | p_1+q/2+q_1) .$$

Nous avons fait apparaître deux éléments de matrice du courant J_1 entre des états dont l'impulsion est déplacée. Ainsi le premier élément de matrice de J_1 a une pôle en $(p_1 - q/2 - q_1)^2 - m_1^2$ qui ne compense donc plus le facteur qui projette sur la couche de masse, $[(p_1 - q/2)^2 - m_1^2]$, contenu dans l'amplitude. C'est pourquoi ces termes ne donnent aucune contribution. Ce raisonnement pouvant être répété pour chacun des éléments de $\sum$, nous en déduisons que l'amplitude est indépendante des fonctions $n^\mu(q)$ et $f(q)$ introduites en (9). Nous les prendrons dorénavant nulles.

Cette démonstration de l'invariance de jauge s'étend sans difficulté aux particules de spin 1/2 ; indiquons rapidement les étapes analogues sans les commenter :

$$G(A) = \left[\not{p} - e \not{A} - m + i\epsilon \right]^{-1}$$

$$J^\mu(q; A) = \frac{\delta}{\delta \tilde{A}_\mu(q)} G(A) = e G(A) e^{iq \cdot X} \gamma^\mu G(A) ,$$

$$q \cdot J(q; A) = e G(A) e^{iq \cdot X} \not{q} G(A) = e G(A) \left[G^{-1}(A), e^{iq \cdot X} \right] G(A) = e \left[e^{iq \cdot X}, G(A) \right] ,$$

qui se généralise de la même façon (Eq. (13)) à des courants d'ordre plus élevé. La suite de la démonstration est identique.

Dans cette preuve algébrique de l'invariance de jauge, on peut se demander à quelle étape exactement est intervenu le fait que l'on croisait les lignes de photons dans les diagrammes que nous étudions. En fait, on voit sur la formule (14) que le noeud de la démonstration réside dans la structure de la somme des $n!$ graphes de l'ordre n , qui est exprimée comme le produit de deux courants. Il nous a paru néanmoins instructif de vérifier explicitement sur la somme des deux diagrammes de l'ordre e^4 (Fig. 2) comment les phénomènes décrits en général se produisent.

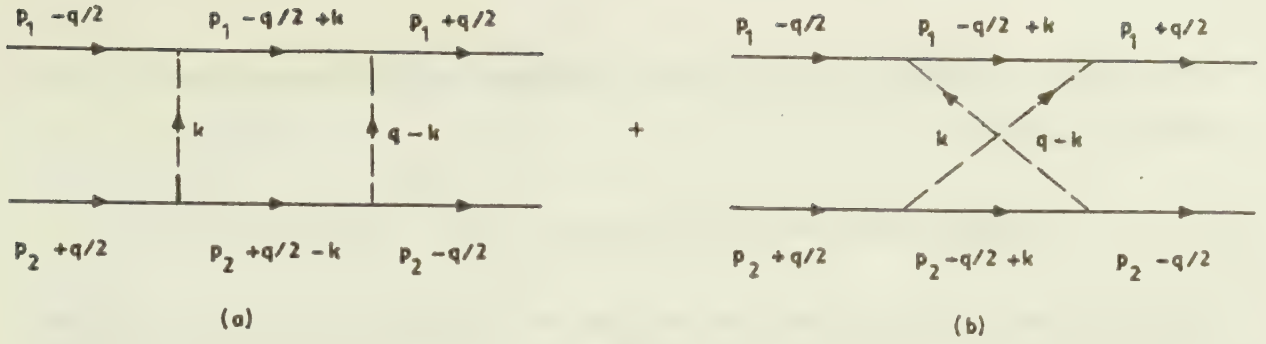


FIG. 2

La somme de ces deux termes est proportionnelle à

$$\int \frac{d^4 k}{(k^2 + i\epsilon)} \frac{\Lambda_{\mu\nu}(q-k)}{[(q-k)^2 + i\epsilon]} \bar{u}_1(p_1 + q/2) \gamma^\mu \frac{1}{\not{p}_1 - \not{q}/2 + \not{k} - m_1 + i\epsilon} \gamma^{\mu'} u_1(p_1 - q/2) \\ \bar{u}_2(p_2 - q/2) \left\{ \gamma^{\nu'} \frac{1}{\not{p}_2 - \not{q}/2 + \not{k} - m_2 + i\epsilon} \gamma^\nu + \gamma^\nu \frac{1}{\not{p}_2 + \not{q}/2 - \not{k} - m_2 + i\epsilon} \gamma^{\nu'} \right\} u_2(p_2 + q/2) .$$

Dans le produit des deux Λ , en plus de $g_{\mu\nu} g_{\mu'\nu'}$, nous trouvons des termes contenant en facteur k_μ , ou k_ν , ou $(q-k)_\mu$ ou $(q-k)_\nu$. Grâce à la symétrie entre les deux particules, et à l'invariance par le changement de k en $(q-k)$, il suffit de montrer que le facteur k_ν annule la somme des deux graphes ; or, avec un facteur k_ν , la contribution de la ligne inférieure des diagrammes devient :

$$\bar{u}_2(p_2 - q/2) \left\{ \not{k} \frac{\not{p}_2 - \not{q}/2 + \not{k} + m_2}{(p_2 - q/2 + k)^2 - m_2^2 + i\epsilon} \gamma^\nu + \gamma^\nu \frac{\not{p}_2 + \not{q}/2 - \not{k} + m_2}{(p_2 + q/2 - k)^2 - m_2^2 + i\epsilon} \not{k} \right\} u_2(p_2 + q/2) \\ = \bar{u}_2(p_2 - q/2) \left\{ \frac{k^2 - 2k \cdot (p_2 - q/2)}{(p_2 - q/2 + k)^2 - m_2^2 + i\epsilon} \gamma^\nu + \gamma^\nu \frac{2k \cdot (p_2 + q/2) - k^2}{(p_2 + q/2 - k)^2 - m_2^2 + i\epsilon} \right\} u_2(p_2 + q/2) ,$$

où nous avons utilisé l'équation de Dirac, sur le spineur de gauche pour le premier terme et de droite pour le second, en commutant $\not{k}$. Avec, les conditions de couche de masse $(p_2 \pm q/2)^2 = m_2^2$, nous avons en définitive

$$\frac{k^2 - 2k \cdot (p_2 - q/2)}{(p_2 - q/2 + k)^2 - m_2^2 + i\epsilon} + \frac{2k \cdot (p_2 + q/2) - k^2}{(p_2 + q/2 - k)^2 - m_2^2 + i\epsilon} = +1 - 1 = 0 .$$

L'invariance de jauge est donc bien le résultat de l'addition des deux diagrammes (a) et (b).

3 - Limite statique

Imaginons que l'une des particules chargées devienne très lourde. Dans le référentiel où elle est au repos, elle crée simplement un champ coulombien statique auquel est soumise la deuxième particule ; dans le cas de particules de spin $1/2$, il s'y ajoutera une interaction entre moments magnétiques ; (cela n'est évidemment correct que dans la mesure où l'on néglige, comme nous l'avons fait constamment, l'effet des corrections radiatives et de la polarisation du vide). Nous allons montrer que cette image physique simple correspond bien à la limite, lorsqu'une des deux masses tend vers l'infini, de la somme des échelles croisées. De façon précise, nous allons établir que lorsque $m_2 \rightarrow \infty$, l'amplitude à quatre points que nous calculons se réduit à celle qui serait donnée par la théorie de Klein-Gordon (spins nuls) ou de Dirac (spins $1/2$), en présence d'un champ coulombien externe, avec de plus s'il y a lieu une interaction dipolaire magnétique. Cette propriété sera très utile dans le chapitre suivant : en effet, nous chercherons les états liés de deux particules de charges opposées comme pôles de l'amplitude de diffusion correspondant toujours à ces échelles croisées. Nous serons alors assurés, si nous avons bien trouvé les pôles, qu'ils tendent lorsque $m_2 \rightarrow \infty$, vers le spectre de Klein-Gordon de l'atome d'hydrogène, ou pour le spin $1/2$, vers celui de Dirac avec en plus la séparation hyperfine due aux interactions magnétiques dipolaires. Là encore, comme pour l'invariance de jauge, nous montrerons qu'il est essentiel de croiser les lignes des photons échangés ; la limite statique des échelles simples n'a rien à voir avec les équations de Klein-Gordon et Dirac (à moins, bien entendu, de ne retenir en plus que la limite non-relativiste pour la particule légère).

La démonstration repose sur les formes (I.28) et (I.35), pour le spin 0 et $1/2$ respectivement, de l'amplitude de diffusion d'une particule lourde par un champ extérieur. Examinons d'abord la limite pour des particules sans spins. Nous avons vu au chapitre I que :

$$\lim_{m_2 \rightarrow \infty} (p_2 - q_2/2 | T_2(A_2) | p_2 + q_2/2) \simeq 2im_2 \int \frac{d^4 x}{(2\pi)^4} e^{+iq_2 \cdot x} \delta\left(\frac{x \cdot p_2}{m_2}\right)$$

$$\left\{ \exp \left[- \frac{ie_2}{m_2} \int_{-\infty}^{+\infty} p_2 \cdot A_2 \left(x + \frac{p_2}{m_2} t \right) dt \right] - 1 \right\} ;$$

c'est-à-dire dans le référentiel où la particule numéro deux est en moyenne au repos (p_2 axe de temps)

$$\lim_{m_2 \rightarrow \infty} (p_2 - q_2/2 | T_2(A_2) | p_2 + q_2/2) \simeq 2im_2 \int \frac{d^3 x}{(2\pi)^4} e^{-i\vec{q}_2 \cdot \vec{x}} \left\{ \exp \left[- ie_2 \int_{-\infty}^{+\infty} A_2^0(t, \vec{x}) dt \right] - 1 \right\} . \quad (15)$$

Nous insérons cette forme dans (7), et utilisons le fait que $\mathcal{K}$ est un opérateur de translation sur les champs :

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(p_2 - q_2/2 | T_2[A_2^\nu(x_2)] | p_2 + q_2/2) |_{A_2=0} &= (p_2 - q_2/2 | T_2 \left[\int d^4 x_1 \frac{\delta}{\delta A_1^\mu(x_1)} D^{\mu\nu}(x_1 - x_2) \right] | p_2 + q_2/2) \\ &\simeq 2im_2 \int \frac{d^3 x_2}{(2\pi)^4} e^{-i\vec{q}_2 \cdot \vec{x}_2} \left\{ \exp \left[\int d^4 x_1 \frac{\delta}{\delta A_1^\mu(x_1)} \left(-ie_2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2^0 D^{\mu 0}(x_1 - x_2) \right) \right] - 1 \right\} \quad (16) \end{aligned}$$

Sur cette formule (16), nous voyons que l'opération $\mathcal{K}$ a transformé l'amplitude T_2 en une superposition d'exponentielles linéaires dans les dérivées fonctionnelles par rapport au champ A_1 , c'est-à-dire en une somme d'opérateurs de translation du champ A_1 . Nous avons donc :

$$\begin{aligned} &\mathcal{K}(p_2 - q_2/2 | T_2(A_2) | p_2 + q_2/2) |_{A_2=0} (p_1 + q_1/2 | T_1(A_1) | p_1 - q_1/2) |_{A_1=0} = \\ &= 2im_2 \int \frac{d^4 x_2}{(2\pi)^4} \delta\left(\frac{x_2 \cdot p_2}{m_2}\right) e^{iq_2 \cdot x_2} (p_1 + q_1/2 | T_1 \left[-ie_2 \int_{-\infty}^{+\infty} dt D^{\mu 0}(x_1 - x_2 - \frac{tp_2}{m_2}) \right] | p_1 - q_1/2) \quad (17) \end{aligned}$$

Effectuons la translation de x_2 sur l'opérateur X_1 de la formule (17) :

$$\begin{aligned} \mathcal{H} T_2 T_1 \Big|_{A_1, A_2=0} &= 2im_2 \int \frac{d^4 x_2}{(2\pi)^4} \delta(x_2^0) e^{iq_2 \cdot x_2} \left(p_1 + q_1/2 \Big| e^{-iP_1 \cdot x_2} \times \right. \\ &\quad \left. T_1 \left[-ie_2 \int_{-\infty}^{+\infty} dt D^{\mu 0} \left(x_1 - \frac{tp_2}{m_2} \right) \right] e^{iP_1 \cdot x_2} \Big| p_1 - q_1/2 \right) . \end{aligned} \quad (18)$$

L'intégrale sur x_2 donne alors $\delta^{(3)}(\vec{q}_1 - \vec{q}_2) \delta(q_1^0) = \delta^{(4)}(q_1 - q_2)$ puisque $q_2^0 = 0$ en vertu des conditions de couche de masse $(p_2 \pm q_2/2)^2 = m_2^2$.

Reportant alors (18) dans la formule générale (7) pour la somme des diagrammes croisés, nous avons :

$$\begin{aligned} &- \frac{i}{(2\pi)^4} \left(p_1 + q_1/2, p_2 - q_2/2 \Big| T \Big| p_1 - q_1/2, p_2 + q_2/2 \right) \\ &= 2im_2 \left(p_1 + q_1/2 \Big| T_1 \left[-ie_2 \int_{-\infty}^{+\infty} dt D^{\mu 0}(t, \vec{x}_1) \right] \Big| p_1 - q_1/2 \right) . \end{aligned} \quad (19)$$

C'est (à un facteur près) l'amplitude de diffusion d'une particule de Klein-Gordon dans le champ extérieur

$$A_1^\mu(x) = -ie_2 \int_{-\infty}^{+\infty} dt D^{\mu 0}(t, \vec{x}) .$$

Compte-tenu de la forme explicite (8) de $D^{\mu \nu}$ (dans la jauge de radiation, puisque nous avons le choix), nous avons

$$A_1^\mu(x) = \frac{e_2}{4\pi} \frac{1}{|\vec{x}|} g^{\mu 0} , \quad (20)$$

qui est le potentiel coulombien statique produit par la particule deux dans le référentiel où elle est au repos. En particulier si nous nous intéressons aux états liés, il suffit de trouver les solutions de l'équation de Klein-Gordon

$$\left[\left(p_1^0 - \frac{e_1 e_2}{4\pi} \frac{1}{|\vec{x}_1|} \right)^2 - \vec{p}_1^2 - m_1^2 \right] \psi = 0 \quad (21)$$

d'énergie inférieure à m_1 .

Quelles sont les modifications à apporter pour traiter le spin 1/2 ? Supposons d'abord que seule la particule légère ait un spin. Toutes les équations précédentes de (15) à (20) restent valables à condition de se souvenir que $T_1(A)$ décrit la diffusion d'une particule de Dirac par le champ extérieur A .

Si de plus la particule lourde a aussi un spin 1/2, nous avons montré à la fin du premier chapitre (Eq. (I.35)), qu'il s'ajoutait un effet magnétique. Le calcul est tout-à-fait semblable à celui que nous venons de faire. Indiquons brièvement les quelques modifications ; au lieu de (16) nous devons écrire :

$$\mathcal{H}(p_2 - q_2/2 | T_2[A_2^\nu(x_2)] | p_2 + q_2/2) \sim 2im_2 \int \frac{d^3x_2}{(2\pi)^4} e^{-i\vec{q}_2 \cdot \vec{x}_2}$$

$$\left\{ \exp \left[\int d^4x_1 \frac{\delta}{\delta A_1^\mu(x_1)} \left(-i \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2^0 \left[e_2 D^{\mu 0}(x_1 - x_2) - \mu_2 \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{rot} D^{\mu k}(x_1 - x_2) \right] \right) \right] - 1 \right\} \quad (16')$$

Au total cela nous conduira à une expression analogue à (19) mais la particule légère est diffusée par un champ électrique et magnétique dont le quadri-potentiel est :

$$A_0(x_1) = \frac{e_2}{4\pi} \frac{1}{|\vec{x}_1|}, \quad \vec{A}(x_1) = \frac{\mu_2}{4\pi} \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{rot} \frac{1}{|\vec{x}_1|} \quad (20')$$

En ce qui concerne les états liés ce dernier terme est responsable de la séparation hyperfine des niveaux de Dirac de l'atome d'hydrogène, habituellement traitée par l'équation de Breit.

Afin de comprendre, plus naïvement, mais peut-être plus "intimement" les phénomènes mentionnés, nous allons revenir, comme nous l'avons fait à propos de l'invariance de jauge, sur l'ordre e^4 de la théorie des perturba-

tions. Prenons cette fois le cas des bosons ; en plus des diagrammes (a) et (b) se rajoutent ici trois termes "seagull" (Fig. 3)

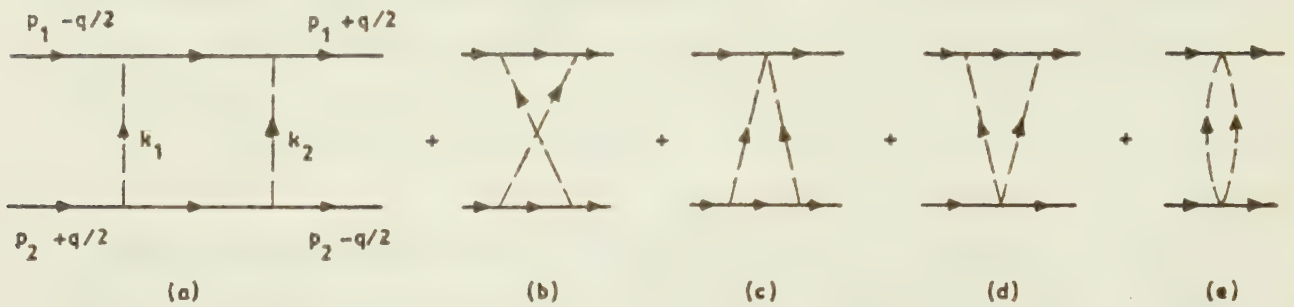


FIG. 3

Etudions d'abord la contribution de (a) + (b) qui est proportionnelle à

$$\begin{aligned}
 & e_1^2 e_2^2 \int \frac{d^4 k_1 d^4 k_2}{(k_1^2 + i\epsilon)(k_2^2 + i\epsilon)} \frac{\delta^{(4)}(k_1 + k_2 - q)}{(p_1 - q/2 + k_1)^2 - m_1^2 + i\epsilon} \times \\
 & \left\{ \frac{[(2p_1 - q + k_1) \cdot (2p_2 + q - k_1)] [(2p_1 + k_1) \cdot (2p_2 - k_1)]}{k_1^2 - 2k_1(p_2 + q/2) + i\epsilon} \right. \\
 & \left. + \frac{[(2p_1 + k_1 - q) \cdot (2p_2 + k_1 - q)] [(2p_1 + k_1) \cdot (2p_2 + k_1)]}{k_1^2 + 2k_1(p_2 - q/2) + i\epsilon} \right\} \\
 & \simeq_{m_2 \text{ grand}} e_1^2 e_2^2 (2m_2) \int \frac{d^4 k_1 d^4 k_2}{(k_1^2 + i\epsilon)(k_2^2 + i\epsilon)} \frac{\delta^{(4)}(k_1 + k_2 - q)}{(p_1 - q/2 + k_1)^2 - m_1^2 + i\epsilon} (2p_1^0 + k_1^0)^2 \left[\frac{1}{k_1^0 + i\epsilon} - \frac{1}{k_1^0 - i\epsilon} \right] ;
 \end{aligned}$$

on s'est placé ici dans le référentiel où p_2 est axe des temps et où par conséquent $q^0 = 0$. L'addition de (a)+(b) annule dans le crochet de la dernière expression les termes en partie principale de $1/k_1^0$, laissant $\delta(k_1^0)$ multiplié, compte-tenu de la fonction $\delta^{(4)}(k_1 + k_2 - q)$, par un autre facteur $\delta(k_2^0)$. On reconnaît alors (à $2m_2$ près) l'un des deux termes du second ordre de la diffusion d'une particule de Klein-Gordon par le champ extérieur $\tilde{A}_\mu(k) = g_{\mu 0} \frac{\delta(k_0)}{k^2 + i\epsilon}$, qui est, bien entendu, la transformée de Fourier du

potentiel coulombien (20). Remarquons, une fois encore, le rôle de l'addition de (a) et (b) pour obtenir une limite correcte. Le terme (c) reconstitue c'est le même calcul, l'autre terme du second - celui en "A²" - de la diffusion par $\tilde{A}_\mu(k)$. Quant à (d) et (e), ils sont d'ordre $1/m_2$ par rapport aux trois termes précédents, comme le montre leur écriture explicite.

4 - L'approximation eikonale relativiste

Récemment de nombreux auteurs ont montré que le comportement à haute énergie des échelles généralisées, considérées ici, pouvait être resommé et prenait alors la forme eikonale de la théorie du potentiel [8,10]. Nous allons reprendre ici cette étude, en suivant d'abord la méthode très directe, d'Abarbanel et Itzykson [10]. Examinons en premier lieu, la théorie où particules et couplages sont scalaires. Nous partons toujours de l'expression (7) pour l'amplitude de diffusion des deux particules. Le problème est ainsi ramené à la détermination de la fonction de Green à une particule dans un champ arbitraire ; nous ne connaissons évidemment pas ces fonctions dans le cas général. Cependant, à haute énergie, il est légitime d'espérer - au moins lorsque les particules sont faiblement défléchies - que l'approximation classique sera le terme dominant d'un développement asymptotique. Nous reprenons donc ici pour chacune des amplitudes à un corps, la formule (I.27) (pour le cas scalaire)

$$(p+q/2 | T_E(A) | p-q/2) = \int \frac{d^4 x}{(2\pi)^4} e^{-iqx} \left[\frac{d}{id\alpha} e^{-i \int_\alpha^\infty dt A(x-2pt)} \right]_{\alpha=0}. \quad (22)$$

Nous avons déjà vu ci-dessus, qu'en présence d'amplitudes exponentielles dans les champs, le calcul des dérivations fonctionnelles se ramène à de simples translations. Explicitement, nous avons :

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{K}(p_1+q_1/2 | T_1^E(A_1) | p_1-q_1/2) \Big|_{A_1=0} (p_2-q_2/2 | T_2^E(A_2) | p_2-q_2/2) \Big|_{A_2=0} \\
 &= (p_1+q_1/2 | T_1^E \left[\int \frac{\delta}{\delta A_2(X_2)} D(X_1-X_2) d^4 X_2 \right] | p_1-q_1/2) (p_2-q_2/2 | T_2^E(A_2) | p_2-q_2/2) \Big|_{A_2=0} \\
 &= \int \frac{d^4 x_1}{(2\pi)^4} e^{-iq_1 \cdot x_1} \frac{1}{i} \frac{d}{d\alpha_1} (p_2-q_2/2 | T_2^E \left[-i \int_{\alpha_1}^{\infty} dt_1 D(x_1-2p_1 t_1-x_2) \right] | p_2-q_2/2) \Big|_{\alpha_1=0}
 \end{aligned}$$

où nous avons utilisé successivement le fait que $\mathcal{K}$, puis T_1^E , se réduisent à des opérateurs de translation. En définitive, prenant pour T_2 la même forme (22), nous avons :

$$\begin{aligned}
 & - \frac{i}{(2\pi)^4} \delta^{(4)}(q_1-q_2) (p_1+q_1/2, p_2-q_2/2 | T_E | p_1-q_1/2, p_2+q_2/2) \\
 &= - \int \frac{d^4 x_1 d^4 x_2}{(2\pi)^8} e^{-iq_1 x_1 + iq_2 x_2} \frac{d}{d\alpha_1} \frac{d}{d\alpha_2} \left(\exp - \int_{\alpha_1}^{\infty} dt_1 \int_{\alpha_2}^{\infty} dt_2 D(x_1-x_2-2p_1 t_1+2p_2 t_2) \right)_{\alpha_1=\alpha_2=0}
 \end{aligned} \tag{23}$$

La conservation de l'impulsion-énergie peut être aisément factorisée dans (23) en intégrant sur x_1+x_2 . L'équation (23) se réduit alors à :

$$(p_1+q/2, p_2-q/2 | T_E | p_1-q/2, p_2+q/2) = -i \int d^4 x e^{-iq \cdot x} \frac{d}{d\alpha_1} \frac{d}{d\alpha_2} \left(\exp - \int_{\alpha_1}^{\infty} dt_1 \int_{\alpha_2}^{\infty} dt_2 D(x-2p_1 t_1+2p_2 t_2) \right)_{\alpha_1=\alpha_2=0} \tag{23}$$

La covariance relativiste a été jusqu'à présent maintenue, mais il est commode de se placer dans le système du centre de masse, où $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$. Choisissons deux des axes dans l'espace à 4 dimensions le long des vecteurs p_1 et p_2 ; on peut décomposer un vecteur arbitraire x sous la forme

$$x = p_1 \tau_1 + p_2 \tau_2 + b \tag{25}$$

où b est un vecteur à deux dimensions (c'est-à-dire un quadri-vecteur $(b^0, \vec{b})$ tel que $b^0 = 0$, $\vec{b} \cdot \vec{p}_1 = \vec{b} \cdot \vec{p}_2 = 0$).

Le jacobien de la transformation (25) s'écrit :

$$\frac{D(\vec{x}_0, \vec{x})}{D(\tau_1, \tau_2, b)} = (p_1^0 + p_2^0) |\vec{p}_1| \quad ; \quad (26)$$

si bien que :

$$T_E = -i |\vec{p}_1| (p_1^0 + p_2^0) \int d^2 b d\tau_1 d\tau_2 e^{i\vec{q} \cdot \vec{b}} \frac{d}{d\alpha_1} \frac{d}{d\alpha_2} \left\{ \exp - \int_{\alpha_1 - \tau_1/2}^{\infty} dt_1 \int_{\alpha_2 + \tau_2/2}^{\infty} dt_2 D(b - 2p_1 t_1 + 2p_2 t_2) \right\}_{\alpha_1 = \alpha_2 = 0}$$

où nous avons explicité le fait que sur la couche de masse q est orthogonal à p_1 et p_2 . On peut alors intégrer sur τ_1 et τ_2 :

$$T_E = -4i |\vec{p}_1| (p_1^0 + p_2^0) \int d^2 b e^{i\vec{q} \cdot \vec{b}} \left\{ \left[\exp - \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_2 D(b - 2p_1 t_1 + 2p_2 t_2) - 1 \right] \right\} . \quad (27)$$

Prenons pour D le propagateur d'un boson de masse μ :

$$D(x) = \frac{ig^2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k e^{-ik \cdot x}}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} , \quad (28)$$

et pour calculer l'intégrale nous répétons sur k le changement de variables (25)

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_2 D(b - 2p_1 t_1 + 2p_2 t_2) = \\ &= \frac{|\vec{p}_1|}{4} \frac{(p_1^0 + p_2^0) ig^2}{(2\pi)^2} \int \frac{d\tau_1 d\tau_2 d^2 k \delta(\tau_1 p_1^2 + \tau_2 p_1 \cdot p_2) \delta(\tau_1 p_1 \cdot p_2 + \tau_2 p_2^2) e^{i\vec{k} \cdot \vec{b}}}{\vec{k}^2 + \mu^2} \\ &= \frac{1}{|\vec{p}_1| (p_1^0 + p_2^0)} \frac{ig^2}{4(2\pi)^2} \int \frac{d^2 k e^{i\vec{k} \cdot \vec{b}}}{\vec{k}^2 + \mu^2} . \end{aligned}$$

Introduisons les variables conventionnelles :

$$s = (p_1 + p_2)^2 , \quad t = -q^2 ,$$

et posons pour abrégier l'écriture :

$$2|\vec{p}_1|(p_1^0 + p_2^0) = \tilde{s} = \left[s - \left(\sqrt{m_1^2 + t/4} - \sqrt{m_2^2 + t/4} \right)^2 \right]^{1/2} \left[s - \left(\sqrt{m_1^2 + t/4} + \sqrt{m_2^2 + t/4} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (29)$$

($\tilde{s}$ tend asymptotiquement vers s) ; nous arrivons à la forme finale

$$T_E(s, t) = -2i\tilde{s} \int d^2b e^{i\vec{q} \cdot \vec{b}} \left[\exp\left(\frac{ig^2}{4\pi} \frac{K_0(\mu b)}{\tilde{s}}\right) - 1 \right] \quad (30)$$

où la fonction de Bessel de troisième espèce K_0 provient de l'intégrale :

$$\frac{1}{2\pi} \int \frac{d^2k e^{i\vec{k} \cdot \vec{b}}}{(\vec{k}^2 + \mu^2)} = \int_0^\infty e^{-\mu b \cosh \varphi} d\varphi = K_0(\mu b) \quad (31)$$

Il est maintenant indiqué de faire quelques remarques à propos de l'expression eikonale (30).

i) Son analogie avec la théorie du potentiel est totale : intégration à deux dimensions sur un paramètre d'impact, exponentiation de l'intégrale de l'interaction.

ii) Nous avons pris comme interaction élémentaire dans ces échelles, l'échange d'un boson. Il est concevable de la modifier pour y incorporer l'effet de la polarisation du vide par exemple, ou de l'échange de particules de spins non nuls.

iii) L'expression (30) est, comme nous le verrons dans la méthode diagrammatique qui suit, la resommation des termes dominants à haute énergie, de chaque ordre de la série des perturbations. Là encore, à un ordre donné, des compensations se produisent.

iv) En réalité lorsque s tend vers l'infini, l'expression (30) peut être redéveloppée et tend vers une constante qui est simplement le terme de Born comme en théorie du potentiel. Donc, pour avoir la limite à très haute énergie, nous n'avons pas besoin de cette forme eikonale. Cependant, dès qu'on s'écarte du cas scalaire, il n'en est plus ainsi.

En effet, revenons maintenant à l'électrodynamique. Pour des particules chargées scalaires, l'interaction se fait par couplage du courant au potentiel du champ électromagnétique ; (nous négligeons à haute énergie les termes en A^2 , qui, de même que dans la limite statique discutée plus haut, ne contribuent pas au comportement dominant à un ordre donné). La présence du courant de particules dans le couplage a pour effet de remplacer le propagateur du photon échangé $g^2 [k^2 - \mu^2 + i\epsilon]^{-1}$, par $-e_1 e_2 2p_1 \cdot 2p_2 [k^2 - \mu^2 + i\epsilon]^{-1}$. Nous gardons ici une masse non nulle pour le photon ; la limite $\mu = 0$ fait l'objet du chapitre suivant. En électrodynamique, nous avons donc

$$T_E(s,t) = -4i |\vec{p}_1| (p_1^0 + p_2^0) \int \frac{d^2b}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q} \cdot \vec{b}} \left\{ \exp \left[\frac{2i p_1 \cdot p_2 e_1 \cdot e_2}{4\pi |\vec{p}_1| (p_1^0 + p_2^0)} K_0(\mu b) \right] - 1 \right\}. \quad (32)$$

Lorsque $s \rightarrow \infty$ le rapport $\frac{p_1 \cdot p_2}{|\vec{p}_1| (p_1^0 + p_2^0)}$ tend vers un, et à haute énergie le terme de Born n'est plus dominant ; il est bien nécessaire dans ce cas, de prendre en considération toute l'expression (32) pour obtenir le comportement asymptotique.

Quelques mots sur l'électrodynamique des particules de spin 1/2 : à haute énergie, les amplitudes avec retournement de spin s'annulent. Il est donc naturel d'admettre qu'au cours des échanges de photons successifs, les particules conservent leurs hélicités, tout au moins dans le terme dominant. Par conséquent, nous négligerons en plus ici le terme en $\sigma \cdot F$ de l'équation (I.30), c'est-à-dire le terme magnétique de l'équation (I.35). Avec les normalisations conventionnelles pour les particules de Dirac, la série des perturbations de l'électrodynamique spinorielle se comporte à haute énergie comme :

$$T_E(s,t) = -\delta_{\lambda_1 \lambda'_1} \delta_{\lambda_2 \lambda'_2} \frac{i |\vec{p}_1| (p_1^0 + p_2^0)}{m_1 m_2} \int \frac{d^2b}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q} \cdot \vec{b}} \left\{ \exp \left[\frac{2i p_1 \cdot p_2 e_1 e_2}{4\pi |\vec{p}_1| (p_1^0 + p_2^0)} K_0(\mu b) \right] - 1 \right\} \quad (33)$$

où les λ désignent les hélicités des particules.

Méthode diagrammatique

Bien que moins rapide, l'analyse des graphes est instructive. Nous nous limiterons au cas scalaire, la discussion précédente pouvant être répétée pour les autres situations. A l'ordre n nous avons, pour la somme des $n!$ diagrammes, l'expression correspondant à la figure (4) :

$$T^{(n)} = i(2\pi)^4 \left[\frac{ig^2}{(2\pi)^4} \right]^n \sum_{\mathcal{P}(i_1 \dots i_n)} \int \frac{d^4 k_1 \dots d^4 k_n}{(k_1^2 - \mu^2 + i\epsilon) \dots (k_n^2 - \mu^2 + i\epsilon)} \times$$

$$\times \delta^{(4)}(k_1 + \dots + k_n - q) G_1(p_1 - q/2 + k_1) G_1(p_1 - q/2 + k_1 + k_2) \quad (34)$$

$$\dots G_1(p_1 - q/2 + k_1 + \dots + k_{n-1}) G_2(p_2 + q/2 - k_{i_1}) G_2(p_2 + q/2 - k_{i_1} - k_{i_2}) \dots G_2(p_2 + q/2 - k_{i_1} - k_{i_2} - \dots - k_{i_n})$$

où $G_\alpha(k) = (k^2 - m_\alpha^2 + i\epsilon)^{-1}$, ($\alpha = 1, 2$) et où $\sum_{\mathcal{P}}$ porte sur les $n!$ permutations de $k_1, k_2, \dots, k_n$.

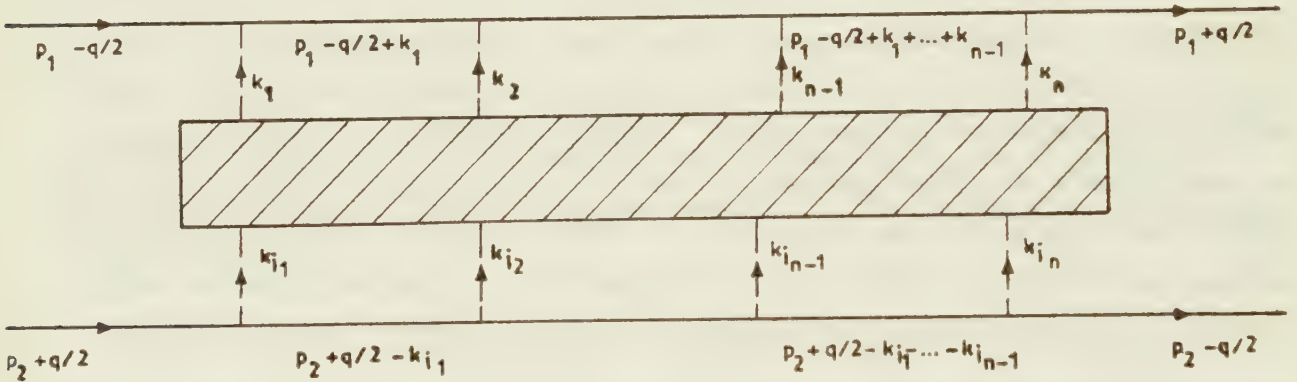


FIG. 4

Les $2(n-1)$ propagateurs des lignes de particules chargées contiennent des dénominateurs du type

$$(p_2 + q/2 - k)^2 - m_2^2 + i\epsilon = k^2 - 2k \cdot p_2 - k \cdot q + i\epsilon,$$

ou bien

$$(p_1 - q/2 + k)^2 - m_1^2 + i\epsilon = k^2 + 2k \cdot p_1 - k \cdot q + i\epsilon.$$

A haute énergie et pour des transferts finis, nous négligerons k^2 et $k.q$ devant les termes en $k.p_1$ ou $k.p_2$. Nous reconnaissons ici l'analogue de la linéarisation des propagateurs non relativistes décrite au chapitre I,1. Nous avons alors

$$T_E^{(n)} = -4i(2\pi)^4 \left(-\frac{ig^2}{4(2\pi)^4} \right)^n \sum_{\mathcal{P}} \int \frac{d^4 k_1 \dots d^4 k_n}{(k_1^2 - \mu^2 + i\epsilon) \dots (k_n^2 - \mu^2 + i\epsilon)} \delta^{(4)}(k_1 + \dots + k_n - q) \times$$

$$\times \frac{1}{p_1 \cdot k_1 + i\epsilon} \dots \frac{1}{p_1 \cdot (k_1 + \dots + k_{n-1}) + i\epsilon} \frac{1}{p_2 \cdot k_{i_1} - i\epsilon} \dots \frac{1}{p_2 \cdot (k_{i_1} + k_{i_2} + \dots + k_{i_{n-1}}) - i\epsilon} \quad (35)$$

Dans l'espace à quatre dimensions nous choisissons une base, constituée des vecteurs p_1 et p_2 , et des deux vecteurs β_1 et β_2 orthogonaux, définis par $\beta_1^2 = -1$ et $\beta_1^0 = 0$, $\vec{\beta}_1 \cdot \vec{p}_1 = 0$; (nous nous plaçons dans le système du centre de masse $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$). Pour un vecteur k quelconque nous avons (Eq. 26) :

$$\delta^{(4)}(k) = |\vec{p}_1| (p_1^0 + p_2^0) \delta(k.p_1) \delta(k.p_2) \delta(k.\beta_1) \delta(k.\beta_2) \quad (36)$$

La somme sur les permutations peut dès lors, se faire en utilisant l'identité (A 1), démontrée en appendice

$$\delta(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \sum_{\mathcal{P}} \frac{1}{\alpha_{i_1} - i\epsilon} \cdot \frac{1}{\alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} - i\epsilon} \dots \frac{1}{\alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \dots + \alpha_{i_{n-1}} - i\epsilon} = (2i\pi)^{n-1} \delta(\alpha_1) \delta(\alpha_2) \dots \delta(\alpha_n)$$

Ainsi :

$$T_E^{(n)} = -\frac{4i}{2i\pi} (2\pi)^4 \left(-2i \frac{\pi}{4} \frac{ig^2}{(2\pi)^4} \right)^n |\vec{p}_1| (p_1^0 + p_2^0) \int \frac{d^4 k_1 \dots d^4 k_n}{(k_1^2 - \mu^2 + i\epsilon) \dots (k_n^2 - \mu^2 + i\epsilon)} \times$$

$$\times \delta[p_1 \cdot (k_1 + \dots + k_n)] \delta^{(2)}[\beta \cdot (k_1 + \dots + k_n - q)] \delta(p_2 \cdot k_1) \dots \delta(p_2 \cdot k_n) \frac{1}{p_1 \cdot k_1 + i\epsilon} \dots \frac{1}{p_1 \cdot (k_1 + \dots + k_{n-1}) + i\epsilon} \quad (37)$$

La fonction qui précède dans (37) le produit des (n-1) propagateurs étant complètement symétrique, on peut remplacer

$$\frac{1}{p_1 \cdot k_1 + i\epsilon} \cdots \frac{1}{p_1 \cdot (k_1 + \dots + k_{n-1}) + i\epsilon} \text{ par } \frac{1}{n!} \sum_{\mathcal{P}} \frac{1}{p_1 \cdot k_{i_1} + i\epsilon} \cdots \frac{1}{p_1 \cdot (k_{i_1} + \dots + k_{i_{n-1}}) + i\epsilon}$$

et utiliser encore l'identité (A 1) :

$$T_E^{(n)} = -(2\pi)^4 \frac{4i}{(2\pi)^2} \left(-\frac{ig^2}{4(2\pi)^2} \right)^n \frac{|\vec{p}_1| (p_1^0 + p_2^0)}{n!} \int \frac{d^4 k_1 \dots d^4 k_n}{(k_1^2 - \mu^2 + i\epsilon) \dots (k_n^2 - \mu^2 + i\epsilon)} \times$$

$$\delta^{(2)} [\beta \cdot (k_1 + \dots + k_n - q)] \delta(p_1 \cdot k_1) \delta(p_2 \cdot k_1) \dots \delta(p_1 \cdot k_n) \delta(p_2 \cdot k_n) \quad . \quad (38)$$

La fonction $\delta^{(2)}$ des composantes transverses peut s'écrire

$$\delta^{(2)} [\beta \cdot (k_1 + \dots + k_n - q)] = \int \frac{d^2 b}{(2\pi)^2} e^{-ib \cdot q} e^{ib \cdot (k_1 + \dots + k_n)} ,$$

et (38) devient alors l'intégrale de la puissance n-ième de

$$\frac{-ig^2}{4(2\pi)^2} \int \frac{d^4 k}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} e^{ik \cdot b} \delta(k \cdot p_1) \delta(k \cdot p_2) = - \frac{1}{|\vec{p}_1| (p_1^0 + p_2^0)} \frac{ig^2}{4(2\pi)^2} \int \frac{d^2 k}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} e^{i\vec{k} \cdot \vec{b}} .$$

Sommant sur n de un à l'infini, nous trouvons :

$$T_E = -4i |\vec{p}_1| (p_1^0 + p_2^0) \int d^2 b e^{i\vec{b} \cdot \vec{q}} \exp \left[-\frac{ig^2}{4\pi} \frac{K_0(\mu b)}{2 |\vec{p}_1| (p_1^0 + p_2^0)} - 1 \right] ,$$

c'est-à-dire exactement l'expression (30).

Nous conclurons ce chapitre par quelques remarques.

i) Il existe un développement systématique dont la forme eikonale (30) est le premier terme ^[10]. Il s'obtient en écrivant pour les amplitudes à un corps des termes correctifs : terme de Saxon-Schiff etc ...

ii) On pourrait par un formalisme semblable, essayer de tenir compte de corrections radiatives. Ainsi l'expression, où on utilise un seul champ extérieur :

$$\mathcal{K}'(p_1 | T(A) | p_1') (p_2 | T(A) | p_2') \Big|_{A=0}, \quad (39)$$

où

$$\mathcal{K}' = \exp \int \frac{\delta}{\delta A(x_1)} D(x_1 - x_2) \frac{\delta}{\delta A(x_2)} d^4 x_1 d^4 x_2 ,$$

contient, en plus des diagrammes précédents, des corrections de vertex croisées de toutes les façons possibles ; la figure (5) représente un diagramme typique de cette série :

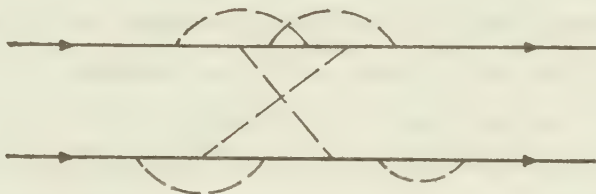


FIG. 5

L'expression (39) n'a de sens que renormalisée. Nous n'avons pas encore considéré cette série (c'est pourquoi nous ne pourrions pas parler dans la suite du déplacement de Lamb des niveaux liés). Nous espérons dans un travail ultérieur, pouvoir calculer ce déplacement à tous les ordres en $\log \alpha$, par cette méthode.

III - UNE FORMULE DE BALMER RELATIVISTE

La détermination d'un procédé systématique et sûr pour trouver les états liés dans les théories relativistes, reste jusqu'à aujourd'hui une tâche difficile. Il ne semble pas qu'il existe de meilleure définition que la recherche des pôles des fonctions de Green. Les échelles généralisées, étudiées au chapitre précédent paraissent particulièrement intéressantes, pour ce problème. En effet, sans parler de l'invariance de jauge, la limite statique étudiée en II.3, nous assure que si nous savons déterminer les pôles de cette sous-série, le spectre qui s'en déduit tend vers celui de Dirac (ou de Klein-Gordon) de l'atome d'hydrogène lorsqu'une des particules devient infiniment lourde. Or de cette série, mises à part des propriétés formelles, nous ne connaissons que sa limite à haute énergie, qui, a priori, n'a aucune raison d'avoir des pôles physiquement interprétables. Cependant nous allons voir que c'est ici la longue portée de l'interaction, c'est-à-dire la masse nulle du photon échangé, qui permet d'approximer les amplitudes de diffusion près de l'avant par l'expression eikonale. Nous aurons ainsi un procédé pour calculer les niveaux d'énergie. De quelques calculs rapides et élémentaires, nous tirerons une formule compacte pour les états liés qui incorpore des effets de recul, proprement relativistes, pour des rapports de masses arbitraires. De plus, à la limite, nous retrouverons le spectre de Dirac de l'atome d'hydrogène, ce qui, compte tenu des approximations faites, n'était plus assuré.

Nous allons commencer par étudier le problème bien connu de la diffusion coulombienne non relativiste, pour montrer que l'approximation classique est une excellente description de la diffusion vers l'avant. En particulier, l'amplitude ainsi calculée a des pôles dans la variable d'énergie qui coïncident avec les niveaux des atomes hydrogénoïdes. Nous verrons ensuite que cela reste encore vrai pour les équations à un corps relativistes ; il y aura là cependant des déplacements dus à des effets de barrière centrifuge qu'il sera nécessaire de discuter. Enfin, nous en viendrons au problème relativiste à deux corps. Au passage, pour la définition même de ce qui s'appelle l'amplitude coulombienne, nous aurons à faire face au problème de la divergence infra-rouge. Elle domine le comportement de la diffusion vers l'avant et nécessite la factorisation d'une phase infinie, comme dans le cas non relativiste. Puisque les divergences infra-rouge sont traitées correctement dans cette approximation classique [7], il n'est pas absurde d'espérer un résultat raisonnable par la présente méthode.

En l'absence d'une "bonne" équation, dont la solution d'ordre le plus bas serait donnée par ce que nous calculons, nous n'avons pas de procédé systématique pour inclure des effets ici négligés : corrections radiatives, effets magnétiques dus aux spins, etc... De façon générale il est difficile d'incorporer les termes à plus courte portée. C'est pourquoi nous accorderons quelque attention à la discussion des termes en α^2/r^2 , induits par le couplage minimal au champ électromagnétique, qui sont responsables de la brisure de la symétrie $O(4)$, c'est-à-dire de la levée de la dégénérescence du spectre.

A titre d'introduction, nous présentons d'abord les démonstrations pour la théorie du potentiel non-relativiste.

1) L'atome d'hydrogène non-relativiste

L'amplitude de diffusion d'un électron par un proton (de charge Z) sera étudiée comme limite, lorsque μ tend vers zéro, de l'amplitude correspondant au potentiel de Yakawa

$$V(r) = - Z\alpha \frac{e^{-\mu r}}{r} \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi} (\hbar=c=1) \quad . \quad (1)$$

Avant de passer à la limite, il sera, bien sûr, nécessaire de factoriser une phase infinie, qui se trouve être

$$\exp\left\{\frac{2imZ\alpha}{p} \log 2p \frac{e^{-C}}{\mu}\right\} \quad C = 0,577... \text{ (constante d'Euler) } , \quad (2)$$

où $m \equiv \frac{m_e m_p}{m_e + m_p}$ et p est l'impulsion relative de l'électron.

Commençons, en premier, par étudier la limite $\mu=0$ de l'amplitude en avant. Cela nous permettra de justifier l'approximation classique lorsque l'angle de déflexion θ est petit.

L'amplitude associée au potentiel (1) $T_\mu(E, \cos\theta)$ est, à θ fixé, une fonction analytique de l'énergie E dans un plan coupé. La coupure de droite s'étend de 0 à $+\infty$; sur l'axe réel négatif, il y a un pôle au point $-\mu^2/4m(1-\cos\theta)$ et une coupure qui commence à $-\mu^2/m(1-\cos\theta)$ et s'étend jusqu'à $-\infty$. De façon à éviter une "contamination" des pôles d'une amplitude, qui serait seulement approximative, par ces singularités de gauche nous remarquerons que, dans la direction en avant $\cos\theta=1$, elles sont repoussées à $-\infty$. C'est pourquoi nous commencerons par étudier $T_\mu(E, \cos\theta=1)$. Le n -ième ordre de la série de Born pour $T_\mu(E, 1)$ est donné par :

$$T^{(n)}(E=p^2/2m, 1) = - \frac{1}{\mu^2} \left(\frac{Z\alpha}{2\pi^2} \right)^n (2m)^{n-1} \int d^3q_1 \dots d^3q_n \delta^{(3)}(\vec{q}_1 + \dots + \vec{q}_n) \\ \left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{1+q_i^2} \right) \frac{1}{2\vec{p} \cdot \vec{q}_1 + \mu q_1^2 - i\epsilon} \dots \frac{1}{2\vec{p}(\vec{q}_1 + \dots + \vec{q}_{n-1}) + \mu(\vec{q}_1 + \dots + \vec{q}_{n-1})^2 - i\epsilon} \quad (3)$$

Pour écrire l'expression (3) nous avons remplacé les impulsions $\vec{q}_i$ des états intermédiaires par $\vec{\mu q}_i$. $T^{(n)}_\mu(E, 1)$ diverge donc comme μ^{-2} lorsque $\mu \rightarrow 0$, et le coefficient de μ^{-2} est obtenu en posant $\mu=0$ dans l'intégrant. Or cela revient simplement à remplacer le propagateur $[(\vec{p}+\vec{q})^2 - p^2 - i\epsilon]^{-1}$ par $(2\vec{p} \cdot \vec{q} - i\epsilon)^{-1}$, puisque μ est en facteur des termes en q^2 . La resommation des termes en μ^{-2} est donc très simple, puisque, lorsque le propagateur est linéarisé, nous retrouvons l'amplitude eikonale. De plus, bien qu'il y ait une non-uniformité dans l'ordre des limites $\theta=0$ et $\mu=0$, il est intéressant d'étudier la solution eikonale pour $\theta \neq 0$; le résultat est donné par l'équation (I.8) :

$$(\vec{p}+\vec{q}/2 | T_E | \vec{p}-\vec{q}/2) = \frac{i p}{m} \int \frac{d^2b}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q} \cdot \vec{b}} \left\{ \exp \left[- \frac{i m}{p} \int_{-\infty}^{+\infty} dz V(\sqrt{b^2 + z^2}) \right] - 1 \right\} ,$$

et pour $V(r) = -Z\alpha \frac{e^{-\mu r}}{r}$ cela donne :

$$(\vec{p}+\vec{q}/2 | T_E | \vec{p}-\vec{q}/2) = \frac{i p}{m} \int \frac{d^2b}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q} \cdot \vec{b}} \left[e^{\frac{2imZ\alpha}{p} K_0(\mu b)} - 1 \right] \quad (4)$$

La limite $\mu \rightarrow 0$ est obtenue en utilisant le développement asymptotique de $K_0(z)$ [24], au voisinage de l'origine :

$$K_0(z) = - J_0(iz) \log \frac{z}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \psi(n+1) \left(\frac{z}{2} \right)^n \frac{1}{(n!)^2} , \quad (5)$$

où ψ désigne la dérivée logarithmique de la fonction Γ d'Euler, soit :

$$K_0(z) = \log \left(\frac{2}{z} e^{-C} \right) + O(z) .$$

On peut alors extraire de l'expression (4) la phase indiquée en (2). Nous nous attendons donc à ce que le facteur restant soit une expression presque

correcte de l'amplitude coulombienne ; or nous trouvons

$$T_C = \frac{ip}{m} \int \frac{d^2b}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q} \cdot \vec{b}} (pb)^{-\frac{2im\alpha Z}{p}}, \quad (6)$$

représentation simple de l'amplitude comme intégrale sur un paramètre d'impact. L'intégration explicite nous donne :

$$T_C = - \frac{Z\alpha}{2\pi^2} \frac{1}{q^2} \left(\frac{4p^2}{q^2} \right)^{-\frac{iZ\alpha m}{p}} \frac{\Gamma(1-i\frac{Z\alpha m}{p})}{\Gamma(1+i\frac{Z\alpha m}{p})}, \quad (7)$$

(où $\text{Im } p \gg 0$) .

L'expression (7) serait très exactement l'amplitude coulombienne, si l'énergie était $p^2/2m$. C'est pourquoi les pôles de (7), provenant de la fonction Γ en numérateur, qui sont donnés par :

$$\frac{iZ\alpha m}{p_n} = n \quad n \geq 1, \quad (8)$$

sont en réalité des "poloïdes", puisqu'ils dépendent du transfert, en vertu de la relation $p^2 = 2mE - q^2/4$. Cependant, cette théorie étant adaptée à la diffusion, avec des transferts petits, il est légitime de considérer que le point $q^2 = 0$, est le plus représentatif du poloïde. On a alors des pôles lorsque :

$$E_n = \frac{p_n^2}{2m} = - \frac{mZ^2\alpha^2}{2n^2}. \quad (9)$$

On reconnaît dans la formule (9) le spectre non-relativiste des atomes hydrogénoides.

Remarque : dans l'expression (4) on peut faire tendre q vers 0 avant μ . On obtient alors le coefficient de μ^{-2} dont nous parlions :

$$T(p^2/2m, 1) = \frac{1}{\mu^2} \int \frac{d^2b}{(2\pi)^3} \left[e^{\frac{2imZ\alpha}{p} K_0(b)} - 1 \right]. \quad (10)$$

On peut étudier la fonction de p définie par cette intégrale ; $K_0(b)$ décroît exponentiellement lorsque $b \rightarrow \infty$; les singularités en p ne proviennent donc que de la divergence éventuelle de l'intégrale au voisinage de $b=0$. On trouve ainsi des pôles lorsque la condition (8) est satisfaite. On peut donc aussi extraire les états liés exacts du coefficient de $1/\mu^2$.

2) Equations de Klein-Gordon et de Dirac dans un potentiel coulombien

Quelques faits nouveaux apparaissent dans le traitement de la diffusion d'une particule relativiste par le potentiel (1). Pour une particule sans spin, l'équation de Klein-Gordon s'écrit :

$$(P_0^2 - m^2)\psi = (\vec{P}^2 + 2P_0 V - V^2)\psi \quad . \quad (11)$$

Décomposant l'opérateur $\vec{P}^2$ en la somme $P_r^2 + \frac{\vec{L}^2}{2}$, le terme en $V^2 = Z^2 \alpha^2 / r^2$ introduit simplement un déplacement des valeurs propres de l'opérateur moment cinétique L^2 . Rappelons brièvement comment on trouve le spectre de (11). Dans une onde partielle déterminée on reconnaît en (11) l'équation de Schrödinger d'une particule dans un potentiel en $1/r$, à condition d'effectuer la correspondance suivante sur les paramètres habituels :

$$\begin{aligned} E \rightarrow P_0^2 - m^2 \quad \ell \rightarrow \lambda \quad \text{où} \quad \ell(\ell+1) - Z^2 \alpha^2 &= \lambda(\lambda+1) \\ \alpha \rightarrow 2P_0 \alpha \quad m \rightarrow 1/2 \quad ; \end{aligned}$$

dans une onde partielle ℓ fixée on sait que les niveaux de Schrödinger sont donnés par

$$E_{\ell, n'} = - \frac{1}{2} \frac{m(Z\alpha)^2}{(n' + \ell + 1)^2} , \quad n' \geq 0$$

si bien que nous trouvons par notre règle de correspondance

$$P_0^2 - m^2 = - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{(2P_0 \alpha Z)^2}{(n' + \lambda + 1)^2} ,$$

c'est-à-dire :

$$E_{n,\ell} = m \left[1 + \frac{Z^2 \alpha^2}{(n - \ell)^2} \right]^{-1/2}, \quad \text{où } \ell = \ell + \frac{1}{2} - \left[\left(\ell + \frac{1}{2} \right)^2 - Z^2 \alpha^2 \right]^{1/2}. \quad (12)$$

Après cette résolution exacte, revenons à l'approximation classique. Reprenons l'étude initiale sur la divergence principale de l'amplitude en avant lorsque $\mu \rightarrow 0$; en plus du potentiel en $1/r$ nous avons aussi à insérer des termes en $1/r^2$ dans la série des perturbations. Mais il est facile de voir que chaque fois qu'on remplace $1/r$ par $1/r^2$ on obtient des termes moins singuliers que μ^{-2} . Abandonnons, dans un premier temps, ces termes en $1/r^2$. L'approximation classique se développe comme avant, et l'effet du facteur $2p_0$ devant le terme en $1/r$ est de remplacer (8) par

$$\frac{iZ\alpha \ 1/2 \ 2p_n^0}{p_n} = n \quad ; \quad (13)$$

qui, tenant compte de l'égalité $p_0^2 - p^2 = m^2$, nous donne le spectre :

$$p_n^0 = E_n \equiv m \left[1 + \frac{Z^2 \alpha^2}{n^2} \right]^{-1/2}. \quad (14)$$

Nous n'avons plus la levée de dégénérescence présente en (12). On peut cependant la retrouver en se souvenant que, dans une onde partielle ℓ donnée $n = n' + \ell + 1$, $n \geq 0$, et, que l'effet de V^2 est de remplacer ℓ par λ , et donc n par $n - \ell$.

Venons en maintenant à l'équation de Dirac, en présence du même potentiel. En l'élevant au carré, (cf. Eq. I.30), nous la mettons sous la forme :

$$\left[(p - eA)^2 - m^2 + \frac{e}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right] \psi = 0.$$

Dans la représentation (I.32) des matrices de Dirac, $\frac{e}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ est égal à $\pm i \vec{\sigma} \cdot \vec{E}$; or le champ électrique est en $1/r^2$ comme le terme en $V^2(r)$, si bien qu'ici encore, moyennant la diagonalisation d'une matrice 2×2 , on peut utiliser la solution de l'équation non relativiste pour trouver les niveaux de Dirac. L'équation de Dirac initiale est équivalente aux deux équations

$$(p_o^2 - m^2)\psi = p_r^2 + \frac{1}{r^2} \left[\vec{L}^2 - Z^2 \alpha^2 + iZ\alpha \vec{\sigma} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \right] + 2p_o V(r) \quad (15)$$

Dans le sous-espace où le moment cinétique j, j_z est fixé, l'opérateur entre crochets est une matrice 2×2 , selon que L prend les valeurs $(j + \frac{1}{2})$ ou $(j - \frac{1}{2})$. Pour se ramener à l'équation de Schrödinger il suffit donc de mettre les valeurs propres de cette matrice :

$$\begin{pmatrix} (j+1/2)(j+3/2) - Z^2 \alpha^2 & \pm iZ\alpha \\ \pm iZ\alpha & (j-1/2)(j+1/2) - Z^2 \alpha^2 \end{pmatrix}$$

sous la forme $\lambda(\lambda+1)$, et d'appliquer la règle de correspondance des paramètres indiquée pour l'équation de Klein-Gordon. Le spectre est le même au remplacement de ℓ par j près :

$$E_{n,j} = m \left[1 + \frac{Z^2 \alpha^2}{(n - \epsilon_j)^2} \right]^{-1/2} \quad \epsilon_j = j + 1/2 - \left[(j+1/2)^2 - Z^2 \alpha^2 \right]^{1/2} \quad (16)$$

L'approximation classique décrite en (I.35) ne reproduit pas, là non plus, le remplacement de n par $n - \epsilon_j$.

3) Etats liés relativistes de deux particules chargées

La discussion est parallèle à celle que nous avons suivie à propos de l'équation de Schrödinger. Nous commençons par chercher les graphes les plus divergents, dans la limite $\mu = 0$, de l'amplitude en avant. Tous les termes de la série des échelles croisées se comportent comme μ^{-2} ; le coefficient de μ^{-2} est obtenu ici aussi en linéarisant les propagateurs, et nous avons vu en (II.44) que cela conduit à la représentation eikonale (33). Nous inversons, comme auparavant, l'ordre limites et considérons la limite pour $\mu=0$ de l'amplitude eikonale pour des transferts petits mais non nuls.

Après factorisation d'une phase indéfiniment oscillante, il nous reste l'amplitude coulombienne :

$$T_c = \frac{\delta_{\lambda_1 \lambda'_1} \delta_{\lambda_2 \lambda'_2}}{(2\pi)^2 m_1 m_2} \tilde{s}^\gamma (-t)^{i\gamma-1} \frac{\Gamma(1+i\gamma)}{\Gamma(1-i\gamma)} \quad (17)$$

où on a posé ($\tilde{s}$ étant défini par (II.65)) :

$$\gamma = \frac{e_1 e_2}{4\pi} \frac{p_1 \cdot p_2}{|\vec{p}_1| (p_1^0 + p_2^0)} = \frac{e_1 e_2}{4\pi} \frac{s - m_1^2 - m_2^2 - t/2}{\tilde{s}} \quad (18)$$

Il n'y a, fort heureusement, de pôles dans le premier feuillet, que lorsque $e_1 e_2$ est négatif. Posons $\frac{e_1 e_2}{4\pi} = -Z\alpha$, les états liés sont les pôles de $\Gamma(1+i\gamma)$ c'est-à-dire qu'ils correspondent à :

$$iZ\alpha \frac{s - m_1^2 - m_2^2 - t/2}{\tilde{s}} = n, \quad n \geq 1$$

Il s'agit, là encore, de poloïdes, et à $t=0$, nous obtenons :

$$\frac{iZ\alpha (s - m_1^2 - m_2^2)}{[s - (m_1 - m_2)^2]^{1/2} [s - (m_1 + m_2)^2]^{1/2}} = n \quad ; \quad (19)$$

soit en définitive, le spectre

$$s_n = m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \left(1 + \frac{Z^2 \alpha^2}{n^2}\right)^{-1/2} \quad n \geq 1 \quad (20)$$

Examinons la limite de (20) lorsque $m_2 \rightarrow \infty$; s étant le carré de l'énergie dans le système du centre de masse, l'énergie de liaison E est définie en soustrayant les masses des particules de $\sqrt{s}$

$$E_n = \sqrt{s_n} - m_1 - m_2 \quad (21)$$

Lorsque $m_2 \rightarrow \infty$, nous avons :

$$E_n + m_1 = \lim_{m_2 \rightarrow \infty} \frac{s_n - m_2^2}{2m_2} = m_1 \left(1 + \frac{Z^2 \alpha^2}{n^2}\right)^{-1/2}$$

Cela est précisément le spectre des équations de Klein-Gordon ou de Dirac, à condition de remplacer, comme nous l'avons indiqué ci-dessus, (Eqs. (12,16)), n par $n - \epsilon_j$ (où j est entier ou demi-entier). Si nous

faisons la même conjecture pour l'équation (20), nous obtenons en définitive, la formule compacte finale :

$$s_{n,j} = m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2 \left(1 + \frac{Z^2 \alpha^2}{(n - \epsilon_j)^2} \right)^{-1/2}.$$

Développons l'énergie de liaison correspondante en puissance de α , jusqu'à l'ordre α^4 :

$$E_{n,j} = \sqrt{s_{n,j}} - m_1 - m_2 = - \frac{Z^2 \alpha^2}{2n^2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} + \frac{Z^2 \alpha^4}{8n^4} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \left[3 - \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \right] - \frac{Z^2 \alpha^4}{n^3} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{1}{2j+1} + \dots \quad (23)$$

Le premier terme est l'énergie de liaison non-relativiste. Le second est un déplacement simultané de tous les niveaux ayant même nombre quantique principal. Il contient une correction relativiste, à la masse relative des deux particules, qui est multipliée ici par le nombre sans dimension $3 - (m_1 m_2 / (m_1 + m_2)^2)$. Enfin au même ordre α^4 apparaît la structure fine des niveaux. Dans le cas particulier du positronium, $m_1 = m_2 = m$, $Z=1$, la formule (23) s'écrit :

$$E_{n,j} = - \frac{m\alpha^2}{4n^2} + \frac{11}{64} \frac{m\alpha^4}{n^4} - \frac{m\alpha^4}{2n^3(2j+1)} + \dots$$

qui se trouve être l'expression correcte, à cet ordre, de l'énergie des états liés, dans les configurations singulets : $S=0$, $j=\ell$. Pour les états triplets, il existe au même ordre une contribution importante, que nous n'avons jamais considérée dans notre série de diagrammes. Il s'agit de l'annihilation virtuelle de la paire électron positron en un photon. Ce diagramme ne contribue pas aux états singulets. Pour la même raison, les pôles que nous trouvons sont réels : les niveaux sont sans largeur, dans cette approximation.

Il faut admettre que le remplacement du n de la formule (20) par le $(n - \epsilon_j)$ de la formule (22) peut sembler quelque peu artificiel. Cependant nous pouvons comprendre, en partie, cette substitution par la remarque suivante. Nous avons vu, au chapitre II, à propos de la limite statique, qu'il n'était pas nécessaire, pour resommer la série des échelles croisées, de linéariser les deux lignes de propagateurs des particules chargées. L'appro-

ximation eikonale faite sur une seule des deux fonctions $T_i(A_i)$ (Eq.(II.42)), ramène le problème à l'étude de la diffusion de la seconde particule dans le champ statique créé par la première. Donc, en faisant une approximation en moins, on trouve bien la formule (22) pour les états liés ; seulement ce procédé est dissymétrique, et nous aimerions évidemment trouver une meilleure justification.

Concluons ce chapitre par quelques remarques.

i) Si le couplage des photons aux particules chargées était scalaire, avec une constante de couplage que, pour des raisons dimensionnelles, nous écririons $2m_i g_i$, les états liés se produiraient entre "charges" de même signe ; et au lieu de (22), nous aurions :

$$s_n = m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \left[1 - \left(\frac{g_1 g_2}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{n^2} \right]^{1/2} .$$

ii) La "catastrophe" infra-rouge se manifeste ici par une phase infinie. D'autre part si nous avions inclus d'autres termes décrivant en particulier l'émission et la réabsorption de photons par la même particule chargée, nous aurions trouvé un autre type de divergence infra-rouge, apparaissant cette fois dans le module de l'amplitude. Pour obtenir un résultat fini, on sait en effet qu'il faut traiter simultanément les processus inélastiques avec émission de photons réels. Il est vraisemblable qu'en calculant la fonction de Green à quatre points, plutôt que l'amplitude, on pourrait aborder le problème plus correctement.

iii) Toutes les formules que nous avons écrites pour les états liés peuvent être rassemblées sous la forme :

$$\frac{Z\alpha}{v_{12}} = -i n_{\text{eff}} \quad . \quad (25)$$

Nous avons appelé v_{12} la vitesse relative des deux particules, exprimée en fonction de leur énergie totale sur la couche de masse, et prolongée analytiquement à des valeurs imaginaires ; n_{eff} est un entier pour le problème

non-relativiste, et égal à $n\epsilon_j$ pour des particules relativistes. En effet dans le premier cas - (équation de Schrödinger) $E = \frac{1}{2} m v_{12}^2$ et la relation (25) donne les niveaux liés. Pour le problème à un corps relativiste $E = m(1-v^2)^{-1/2}$, et, avec (25) on retrouve les niveaux de Dirac. Pour deux particules relativistes, la vitesse relative est la vitesse de l'une des particules dans le référentiel où la seconde est au repos ; on trouve ainsi

$$v_{12} = \frac{\sqrt{\Delta(s, m_1^2, m_2^2)}}{s - m_1^2 - m_2^2} \quad \text{où} \quad \Delta(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ca$$

et la formule (25) avec cette nouvelle définition de v_{12} nous permet de retrouver (22). Cette remarque a une interprétation physique : la contribution dominante à l'énergie de liaison provient des forces de Coulomb exercées par la première particule, dans le référentiel où elle est au repos, sur la seconde. Ce concept est invariant lorsqu'on échange les rôles des deux particules, et il peut être étendu à tous les référentiels, par la transformation de Lorentz correspondante sur le champ électromagnétique.

iv) Rien ne nous assure que la formule (22) reproduit bien les pôles de la série des échelles croisées, traitée sans approximation. Cependant l'exemple de la théorie du potentiel, l'exactitude de la limite statique, nous engagent à le supposer mais nous ne savons pas actuellement le démontrer.

IV - PRODUCTION DE PAIRES PAR UN CHAMP ALTERNATIF DANS LE VIDE

1 - Introduction

L'électrodynamique quantique prévoit en raison des fluctuations de la densité de charges du vide, un comportement du champ électromagnétique différent, même dans le vide, de celui qui est prévu par la théorie classique. Bien qu'il s'agisse d'effets extrêmement petits, il devrait exister des termes non-linéaires dans la réponse. Des expérimentateurs travaillant sur des lasers optiques de grande puissance ont soulevé la question de l'observabilité actuelle de ces prédictions. Ce chapitre est consacré au calcul d'une réponse non-linéaire absorptive, à savoir la création de paires de particules chargées (électron-positron) par un champ électrique oscillant. On se représente intuitivement l'effet collectif de millions de photons (un nombre de l'ordre de l'énergie à fournir $2mc^2$, divisée par l'énergie $\hbar\omega_0$ d'un photon individuel), concentrés dans des volumes petits et matérialisant leur énergie. Par ailleurs J. Schwinger^[15] a calculé, il y a déjà fort longtemps, le taux de création par un champ statique. Lorsque nous serons à la fin des calculs, nous verrons que l'estimation à laquelle conduit ce calcul en champ statique est parfaitement valable et que, par conséquent, il n'est pas question d'observer à l'heure actuelle ce phénomène. La seule possibilité serait d'accroître les champs maximaux disponibles d'au moins quatre à cinq ordres de grandeur. Par contre, peut être, des effets non-linéaires, mais de type dispersif, seraient plus accessibles.

Le but des calculs sera d'estimer combien le taux de production de paires dépend de la fréquence ω_0 du champ. Nous serons amenés du même coup, à résoudre un exercice instructif sur le plan théorique puisqu'il doit permettre d'interpoler entre deux limites extrêmes. La première correspond à une fréquence nulle, et il lui est associé un taux de production possédant une singularité essentielle lorsque le champ E s'annule ; nous verrons en effet qu'il est proportionnel à $\exp(-E_0/E)$. La seconde est valable aux intensités extrêmement faibles pour lesquelles la théorie des perturbations s'applique, et dont l'ordre le plus bas prédit un taux de la forme

$$(E/E_1)^{4mc^2/\hbar\omega_0}.$$

L'ordre de grandeur des champs E_0 et E_1 apparaissant dans les expressions ci-dessus peut être estimé de la manière suivante. En ce qui concerne le cas statique, nous obtiendrons un champ typique E_0 en exprimant que le travail du champ agissant sur une charge unité e , sur une distance caractéristique du problème (ici la longueur d'onde de Compton de l'électron $\hbar/mc$), doit fournir l'énergie $2mc^2$. Nous attendons donc un E_0 tel que $eE_0\hbar/mc \sim mc^2$ soit $E_0 \sim \frac{m^2c^3}{e\hbar}$. A l'extrémité opposée, où nous appliquons la théorie des perturbations, nous développons en puissances, non du champ, mais de son potentiel vecteur (de l'ordre de E/ω_0) multiplié par la constante de couplage e , et divisé par une impulsion moyenne venant du propagateur de l'électron $\sim mc$; au total cela conduit à $E_1 \sim \omega_0 mc/e$.

Une remarque par analogie permet de comprendre simplement le comportement singulier en $\exp(-1/E)$ du cas statique : elle consiste à rapprocher la création de paires de l'ionisation d'un atome par un champ électrique, où on obtient également la même singularité provenant dans ce cas là, du franchissement d'une barrière de potentiel. En effet, en employant un langage imagé, le vide peut être considéré comme une assemblée de particules dans des états d'énergie négative. Lorsque, sous l'effet de l'accélération communiquée par le champ électrique, une particule parvient à franchir la barrière d'énergie $2mc^2$, une paire est créée sous la forme d'une particule et d'un trou. Le nombre d'atomes ionisés par unité de temps sous l'influence d'un champ constant peut être évalué facilement à l'aide d'un modèle à une dimension d'une particule liée dans un puits de potentiel. Pour que l'ionisation se produise, l'électron doit franchir une barrière dont l'épaisseur est sensiblement V_0/eE , où V_0 désigne l'énergie de liaison et E le champ électrique (Fig. 6).

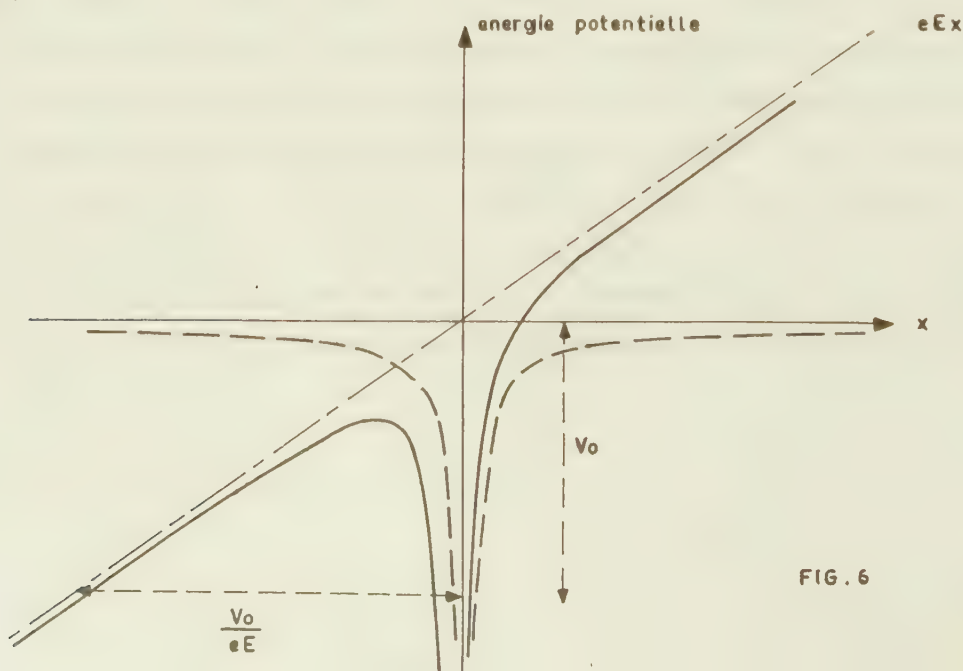


FIG. 6

La probabilité d'ionisation contient donc le facteur

$\exp - \frac{2}{\hbar} \int_0^{V_0/eE} \sqrt{2m(V_0 - eEx)} dx = \exp - \frac{4}{3\hbar} \sqrt{2mV_0} \frac{V_0}{eE}$ (pour l'atome d'hydrogène
où $V_0 = \frac{m\alpha^2 c^2}{2}$ pour le fondamental, cela donne $\exp - \frac{2}{3} \frac{m\alpha^2 c^3}{eE\hbar}$, qui se trouve
être le facteur exponentiel correct du résultat exact. Dans le cas de la
création de paires, l'analogie consiste à supposer les paires liées dans le vide
avec une énergie d'ionisation $V_0 \simeq 2mc^2$; cela donne un taux de création proportionnel à
 $\exp - \frac{16}{3} \frac{m^2 c^3}{\hbar eE} = \exp - \frac{16}{3} \frac{E_0}{E}$. Nous verrons que les calculs précis avec une
cinématique relativiste correcte reviennent simplement à remplacer ce $16/3$
par π .

Nous avons rassemblé dans la deuxième section les principaux
résultats théoriques dus à J. Schwinger^[15,16] concernant ce problème et dont
nous aurons besoin pour la suite. Dans la troisième section nous rappelons le
résultat du champ constant, en montrant que le problème est soluble car il peut
être ramené à un problème d'oscillateur harmonique. La quatrième section est
consacrée à la discussion d'un certain nombre d'hypothèses simplificatrices
conduisant à des expressions calculables en pratique, car on ne peut, hélas,
traiter exactement que le seul cas du champ constant. Nous montrerons que
le problème peut se ramener à la résolution d'un problème de diffusion à une
dimension; nous justifierons alors et utiliserons une correction à la
version de l'approximation B.K.W. décrite au chapitre (I.2). Les expressions
que nous trouverons ont une certaine ressemblance avec celles qui ont été
obtenues dans le problème de l'ionisation^[26]. Finalement dans la section 5,
nous discuterons les résultats et montrerons que l'observation de la création
de paires nécessite des intensités pour les champs $E \gtrsim E_c$, où E_c est
défini par :

$$\frac{eE_c \hbar}{m^2 c^3} \sim \frac{\hbar \omega_0 / mc^2}{\text{sh } \hbar \omega_0 / mc^2} .$$

Cette estimation montre que, quand bien même disposerait-on de fréquences
dix mille fois plus élevées que celles des lasers optiques, cette fréquence
ne jouerait aucun rôle. La seule possibilité serait d'accroître les puissances
disponibles, mais d'un facteur considérable.

2 - Rappels théoriques

Dès que Dirac eut présenté la théorie du positron, apparurent les premiers travaux concernant les modifications à apporter à l'électrodynamique du vide. En 1936 Heisenberg et Euler^[14] d'une part et Weisskopf^[14] d'autre part calculaient la polarisabilité du vide pour des champs lentement variables. Plus tard, J. Schwinger consacra le dernier article de la série : "The theory of quantized fields"^[16] à la création de paires. Nous allons rappeler les résultats dont nous aurons besoin, en suivant parfois des méthodes qui sont plus familières, en ce qui nous concerne, que celles de Schwinger.

Ce problème a le mérite d'illustrer l'emploi des équations relativistes à une particule en théorie des champs, sans que l'on soit conduit à des paradoxes. Les probabilités de transition y seront explicitement positives. De même apparaissent, non dans les parties absorptives qui nous intéressent, mais dans les parties dispersives, des divergences ultra-violettes que ce formalisme permet de renormaliser aisément. Nous verrons, en effet, que le taux de création de paires sera exprimé à l'aide de la solution de l'équation de Klein-Gordon ou de Dirac en présence de sources extérieures.

Le système étudié consiste en un champ électromagnétique classique, dont le quadri-potential sera noté $A_\mu(x)$, couplé au courant des particules chargées. Nous traiterons les deux possibilités d'un champ de particules de spin 1/2 (qui correspond au cas physique des paires électron-positron) et d'un champ de particules chargées de spin zéro (modèle qui nous sera utile par la suite). En un temps très reculé dans le passé, on suppose que l'état du système est le vide $|0\rangle$; ni particule, ni champ classique ne sont présents. Ensuite le champ électromagnétique est introduit adiabatiquement, puis coupé au bout d'un temps très long. L'évolution du système est gouvernée par l'opérateur d'évolution entre les temps $-\infty$ et $+\infty$, c'est-à-dire, en représentation d'interaction par la matrice S . Il est clair que, si l'élément de matrice $\langle 0|S|0\rangle$ ne se réduit pas à une simple phase, c'est-à-dire s'il possède un module inférieur à un, c'est que dans l'intervalle des paires auront été créées. De façon précise, si nous pouvons écrire :

$$|\langle 0|S|0\rangle|^2 = \exp - \int d^4x w(x) \quad , \quad (1)$$

$w(x)$ sera interprétée comme la probabilité de création de paires par unité de volume et par unité de temps.

Il est nécessaire maintenant de séparer les calculs pour les fermions et les bosons. Les résultats finaux correspondant porteront l'indice F ou B.

a) Particules de Dirac

La matrice S est donnée (dans les unités naturelles $\hbar=c=1$) par l'expression formelle,

$$S = T \exp \left[-ie \int d^4x j(x) \cdot A(x) \right] \quad (2)$$

où T désigne le produit chronologique, $j^\mu(x)$ le courant de particules qui s'exprime en fonction du champ libre quantifié $\psi(x)$ par

$$j^\mu(x) = \frac{1}{2} \left[\bar{\psi}_\alpha(x), \gamma^\mu_{\alpha\beta} \psi_\beta(x) \right] \quad (3)$$

Le champ $\psi(x)$ satisfait l'équation de Dirac $(-i \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m) \psi(x) = 0$. Nous noterons $S_0(A)$ l'élément de matrice :

$$S_0(A) \equiv \langle 0 | S | 0 \rangle \quad (4)$$

La première étape consiste à montrer que $S_0(A)$ peut être écrit comme un déterminant infini (un déterminant de Fredholm). Nous montrerons cela de deux façons, différentes d'ailleurs toutes deux de celle qu'employa Schwinger.

i) Méthode diagrammatique

Nous partons de la formule exponentielle bien connue en fonction des diagrammes connexes :

$$S_0(A) = \exp \langle 0 | S | 0 \rangle_c \quad (5)$$

Les diagrammes de cette théorie sont simplement des boucles fermées (Fig. 7).



FIG. 7

Pour les diagrammes vide-vide la correspondance entre diagrammes et système de contractions de Wick n'est pas, comme on le sait, biunivoque. Il faut incorporer un poids qui est l'inverse de l'ordre du groupe d'automorphismes des lignes du diagramme ; de façon moins pédante, cela signifie, que le diagramme d'ordre n doit être divisé par n car il est invariant par permutations cycliques. La contribution de l'ordre n est donc en appliquant les règles de Feynman :

$$\langle 0 | S | 0 \rangle_c^{(n)} = - \frac{1}{n} \text{Tr}(G_o eA)^n ,$$

trace car il s'agit d'un diagramme fermé, le signe moins venant de la boucle fermée de fermions (comme on peut s'en convaincre aisément en revenant au théorème de Wick). Le propagateur causal G_o est défini par :

$$(x | G_{o, \alpha\beta} | y) = -i \langle 0 | T(\psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y)) | 0 \rangle = (x | \left(\frac{1}{\not{p} - m + i\epsilon} \right)_{\alpha\beta} | y) . \quad (6)$$

Soit G le propagateur en présence du champ :

$$G = \frac{1}{\not{p} - e A(X) - m + i\epsilon} = G_o + G_o eA G \quad (7)$$

où P et X désignent, comme auparavant, les opérateurs canoniquement conjugués : $[P_\mu, X_\nu] = -ig_{\mu\nu}$.

La sommation sur n peut se faire sous la forme :

$$S_o(A) = \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{Tr}(G_o eA)^n\right) = \exp \text{Tr} \log(1 - G_o eA) , \quad (8)$$

et suivant la formule connue pour les matrices finies $\text{Tr} \log M = \log \text{Dét } M$,

$$S_0(A) = \text{Dét}(1 - G_0 eA) = \text{Dét } G^{-1} G_0, \quad (9)$$

où il s'agit ici, en fait, du déterminant de Fredholm de l'équation intégrale (7). (Il faut préciser que les symboles Tr et Dét se réfèrent ici au produit de l'espace à quatre dimensions des indices spinoriels par l'espace à ∞^4 dimensions des coordonnées, c'est-à-dire qu'ils s'appliquent à des noyaux intégraux $K_{\alpha\beta}(x,y)$, $\text{Tr} = \sum_{\alpha} \int d^4x K_{\alpha\alpha}(x,x)$, etc ...).

ii) Démonstration algébrique directe

Développons l'expression initiale (2) de la matrice S en puissances de l'interaction

$$S_0(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ie)^n}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n A^{\mu_1}(x_1) \dots A^{\mu_n}(x_n) \langle 0 | T [j_{\mu_1}(x_1) \dots j_{\mu_n}(x_n)] | 0 \rangle,$$

Le produit chronologique des courants dont il faut prendre l'élément de matrice est exprimé en fonction des champs libres $\psi(x)$ (Eq. (3)). Cette valeur moyenne est ensuite calculée en utilisant le théorème de Wick qui met cette expression sous la forme d'une somme de produits de contractions des champs deux à deux précédés du signe habituel de la permutation qui permet d'apparier les champs. Il est commode d'introduire

$$\chi_{\alpha}(x) = \sum_{\beta, \mu=1}^4 A_{\mu}(x) \gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \psi_{\beta}(x) = (A(x)\psi(x))_{\alpha},$$

pour écrire

$$\begin{aligned} A^{\mu_1}(x_1) \dots A^{\mu_n}(x_n) \langle 0 | T [j_{\mu_1}(x_1) \dots j_{\mu_n}(x_n)] | 0 \rangle &= \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_n=1}^4 \langle 0 | T [\bar{\psi}_{\alpha_1}(x_1) \chi_{\alpha_1}(x_1) \times \\ &\times \bar{\psi}_{\alpha_2}(x_2) \chi_{\alpha_2}(x_2) \dots \bar{\psi}_{\alpha_n}(x_n) \chi_{\alpha_n}(x_n)] | 0 \rangle = (-)^n \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \sum_P (-)^P C_{\alpha_1 \alpha_{P_1}}(x_1 x_{P_1}) \dots C_{\alpha_n \alpha_{P_n}}(x_n x_{P_n}). \end{aligned}$$

La dernière égalité est obtenue par application du théorème de Wick en posant, pour la contraction élémentaire,

$$C_{\alpha\beta}(xy) = \langle 0 | T(\chi_{\alpha}(x) \bar{\psi}_{\beta}(y)) | 0 \rangle = i \sum_{\alpha'} A_{\alpha\alpha'}(x) G_{0,\alpha'\beta}(xy) \quad . \quad (10)$$

La somme sur les permutations reconstitue un déterminant $n \times n$, portant sur le multi-indice α, x :

$$\sum_P (-)^P C_{\alpha_1 \alpha_{P_1}}(x_1 x_{P_1}) \dots C_{\alpha_n \alpha_{P_n}}(x_n x_{P_n}) = C \begin{pmatrix} \alpha_1 x_1, \dots, \alpha_n x_n \\ \alpha_1 x_1, \dots, \alpha_n x_n \end{pmatrix} \quad ,$$

(la notation $C \begin{pmatrix} i_1 \dots i_n \\ j_1 \dots j_n \end{pmatrix}$ désigne le déterminant de la matrice dont l'élément de la p -ième ligne et q -ième colonne est $C_{i_p j_q}$).

En conséquence,

$$S_0(A) = \sum_0^{\infty} \frac{(ie)^n}{n!} \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_n=1}^4 d^4 x_1 \dots d^4 x_n C \begin{pmatrix} \alpha_1 x_1, \dots, \alpha_n x_n \\ \alpha_1 x_1, \dots, \alpha_n x_n \end{pmatrix} \quad ;$$

c'est là la formule de Fredholm pour le développement de $\text{Dét}(1+ieC)$ en puissances des mineurs diagonaux à un élément, puis deux sur deux, ..., n sur n , etc ... Finalement on obtient, en reprenant l'égalité (10)

$$S_0(A) = \text{Dét}(1+ieC) = \text{Dét}(1-eA G_0) \quad ,$$

qui redonne le résultat obtenu en (9) par la resommation des diagrammes. Il faut bien voir que cette expression est formelle, non seulement parce qu'elle demande de calculer le déterminant de Fredholm d'une équation intégrale qu'on ne sait pas en général résoudre mais aussi parce qu'elle contient des termes infinis. Cependant nous verrons plus bas que ces infinis n'apparaissent que dans la partie réelle du logarithme de $S_0(A)$, pour laquelle il faut définir des prescriptions de renormalisation, et non dans la partie imaginaire qui seule nous intéresse dans le calcul de la probabilité (Eq. (1)).

Remarque : Il est intéressant de vérifier que, en dépit des apparences, $S_0(A)$ est bien invariant de jauge. En effet changeons $A_{\mu}(x)$ en $A_{\mu}(x) + \partial_{\mu} \Phi(x)$; la fonction de Green inverse $P-eA-m$ devient :

$$P-eA-e\partial\Phi-m = e^{ie\Phi(X)} (P-eA-m) e^{-ie\Phi(X)} \quad .$$

Ce changement de jauge n'est qu'une transformation unitaire sur la fonction de Green et il laisse donc invariant le déterminant de G^{-1} qui apparaît dans

On peut donner à la formule (9) une forme un peu différente qui nous servira pour le calcul dans un champ constant : prenant le logarithme de l'égalité (9) nous obtenons

$$\log S_0(A) = \text{Tr} \log G^{-1} G_0 = \text{Tr} \log \left[(P - eA - m) \frac{1}{P - m + i\epsilon} \right] ;$$

l'égalité de la trace d'une matrice et de sa transposée, le fait que sous le signe trace le logarithme d'un produit de matrices est commutatif, l'existence d'une matrice C , quatre sur quatre, telle que $C \gamma_\mu C^{-1} = - \gamma_\mu^T$ (M^T désigne la transposée de la matrice M) permettent d'écrire :

$$\log S_0 = \text{Tr} \log \left[(P - eA + m) \frac{1}{P + m - i\epsilon} \right] .$$

Additionnant les deux formes de $\log S_0$ nous obtenons :

$$\log S_0 = \frac{1}{2} \text{Tr} \log \left\{ [(P - eA)^2 - m^2] \frac{1}{P^2 - m^2 + i\epsilon} \right\}$$

Grâce à l'identité

$$\log x - \log y = \int_0^\infty \frac{ds}{s} (e^{isy} - e^{isx}) ,$$

(qui est entendue avec les prescriptions de parties imaginaires positives qui sont bien celles que rencontrons dans (11)) nous obtenons :

$$- 2\text{Re} \log S_0 = \int d^4x w(x) = -\text{Re} \int d^4x \int_0^\infty \frac{ds}{s} \text{tr}(x | e^{is(P^2 - m^2)} - e^{is[(P - eA)^2 - m^2]} | x) ,$$

où le symbole tr ne concerne plus que la trace sur les indices spinoriels.

On en tire finalement le taux de création de paires

$$W_F(x) = \text{Re} \text{tr} \int_0^\infty \frac{ds}{s} (x | e^{is[(P - eA)^2 - m^2 + \frac{e}{2} \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu}]} - e^{is[P^2 - m^2]} | x) . \quad (14)$$

En réalité, même en laissant de côté les questions de renormalisation, cette formule (14) est d'emploi délicat à l'exception du cas du champ constant qui comme tous les modèles solubles est fait de particularités impossibles à transposer pour le cas général. Nous avons, par exemple, tenté de l'utiliser pour construire un développement en puissances de l'interaction. Il est nécessaire pour pouvoir faire les calculs de séparer en différents morceaux la contribution d'un ordre donné, mais il est très difficile de donner un sens à chacun des morceaux pris isolément, notamment pour prendre la partie réelle indiquée. C'est là une difficulté que l'on rencontre parfois dans les développements perturbatifs du problème à N corps. Fort heureusement, il est possible de mettre $W_F(x)$ sous une autre forme, où ces difficultés sont parfaitement aplanies. La méthode consiste à exploiter la relation d'unitarité.

Utilisation de l'unitarité

Introduisons d'abord l'opérateur de diffusion $T(A)$ d'une particule de Dirac dans un champ extérieur $A(x)$, qui satisfait l'équation intégrale :

$$T(A) = eA + eA G_0 T(A) \quad . \quad (15)$$

Nous aurons aussi à utiliser, en plus de G_0

$$G_0 = \frac{1}{p-m+i\epsilon} \quad , \quad \text{l'opérateur } \bar{G}_0 = \frac{1}{p-m-i\epsilon} \quad . \quad (16)$$

Les propriétés de conjugaison hermitique des matrices de Dirac nous donnent $\bar{G}_0 = \gamma_0 G^\dagger \gamma_0$.

Avec $\bar{G}_0$ nous construisons également $\bar{T}(A)$

$$\bar{T}(A) = eA + eA \bar{G}_0 \bar{T}(A) = \gamma_0 T^\dagger(A) \gamma_0 \quad , \quad (17)$$

où nous avons supposé explicitement le champ $A(X)$ hermitique.

La relation d'unitarité se déduit de l'utilisation simultanée de (15) et (17) :

$$\begin{aligned} T &= eA + eA G_O T = eA + [\bar{T} - \bar{T} \bar{G}_O eA] G_O T \\ &= eA + \bar{T} G_O T - \bar{T} \bar{G}_O (T - eA) = \bar{T} + \bar{T} (G_O - \bar{G}_O) T, \end{aligned}$$

soit finalement :

$$T(A) - \bar{T}(A) = \bar{T}(A) (G_O - \bar{G}_O) T(A) = T(A) (G_O - \bar{G}_O) \bar{T}(A). \quad (18)$$

Définissons aussi les opérateurs de densité d'états d'énergie positive et négative

$$\rho_{(+)} = 2\pi(p+m) \theta(\pm P_O) \delta(P^2 - m^2). \quad (19)$$

En séparant les parties réelles et imaginaires de G_O et $\bar{G}_O$:

$$\begin{aligned} G_O &= (p+m) \left[PP \frac{1}{P^2 - m^2} - i\pi \delta(P^2 - m^2) \right] \\ \bar{G}_O &= (p+m) \left[PP \frac{1}{P^2 - m^2} + i\pi \delta(P^2 - m^2) \right], \end{aligned}$$

nous obtenons

$$G_O - \bar{G}_O = -i[\rho_{(+)} + \rho_{(-)}]. \quad (20)$$

Définissons enfin le propagateur retardé

$$G_O^{\text{Ret}} = \frac{1}{p - m + i\epsilon}$$

où ϵ est un quadri-vecteur infinitésimal du genre temps positif, c'est-à-dire que

$$G_O^{\text{Ret}} = (p+m) \frac{1}{(P+i\epsilon)^2 - m^2} = (p+m) \left[PP \frac{1}{P^2 - m^2} - i\pi \text{Sgn}(P^0) \delta(P^2 - m^2) \right];$$

soustrayant G_0 nous trouvons

$$G_0^{\text{Ret}} - G_0 = i \rho_{(-)} \quad . \quad (22)$$

Montrons maintenant la relation

$$\text{Dét}(1 - eA G_0^{\text{Ret}}) = 1 \quad . \quad (23)$$

En effet ce déterminant ne diffère de l'expression (9) de $S_0(A)$ que par le remplacement de G_0 par G_0^{Ret} ; son développement en puissances de eA est donc constitué de boucles où chaque ligne de fermions porte maintenant G_0^{Ret} . Le calcul d'une boucle est une intégrale sur une quadri-impulsion qui se propage le long de la boucle ; commençons par intégrer sur la quatrième composante (variable d'énergie). A la différence de G_0 qui possède un pôle, tant dans le demi-plan supérieur que dans le demi-plan inférieur de l'énergie, G_0^{Ret} a ses deux pôles en-dessous de l'axe réel. Par conséquent l'intégrale d'énergie calculée en refermant le contour par un grand cercle dans le demi-plan supérieur s'annule. Cela montre que tout diagramme fermé construit avec des propagateurs retardés est nul, ce qui explique la relation (23). Il est peut être encore plus parlant, pour comprendre cette relation, de calculer les diagrammes dans l'espace de configuration. La boucle d'ordre n donne le produit des n propagateurs $G_0^{\text{Ret}}(x_1, x_2) G_0^{\text{Ret}}(x_2, x_3) \dots G_0^{\text{Ret}}(x_n, x_1)$. Or $G_0^{\text{Ret}}(x, y)$ n'est non nul que si $x-y$ est un vecteur situé dans le cône futur ; cette relation d'ordre est impossible à satisfaire simultanément pour $x_1 - x_2, x_2 - x_3, \dots, x_n - x_1$.

La relation (23) va nous servir de la façon suivante : on commence par remplacer G_0^{Ret} par son expression (22) :

$$1 - eA G_0^{\text{Ret}} = 1 - eA [G_0 + i \rho_{(-)}] \quad ;$$

puis

$$eA \rho_{(-)} \quad \text{par} \quad (T - eA G_0 T) \rho_{(-)} = (1 - eA G_0) T \rho_{(-)}$$

d'après la définition même (Eq. (15)) de T . Alors :

$1 = \text{Dét}(1 - eA G_O^{\text{Ret}}) = \text{Dét}[(1 - eA G_O)(1 - i T \rho_{(-)})] = \text{Dét}(1 - eA G_O) \text{Dét}(1 - i T \rho_{(-)})$.
Le premier facteur n'est autre, en vertu de la relation (8), que $S_O(A)$; par conséquent nous avons une nouvelle expression pour $S_O(A)$:

$$1/S_O(A) = \text{Dét}(1 - i T \rho_{(-)}) \quad (24)$$

Prenons les complexes conjugués des deux membres de (24)

$$1/S_O^*(A) = \text{Dét}(1 + i T^\dagger \rho_{(-)}) = \text{Dét}(1 + i \bar{T} \rho_{(-)}) \quad (25)$$

en vertu de l'hermiticité de $\rho_{(-)}$ et de la relation $\text{Dét}(\gamma_O)^2 = 1$. Faisant le produit de (24) et de (25) nous trouvons :

$$|S_O(A)|^{-2} = \text{Dét}(1 - i T \rho_{(-)}) (1 + i \bar{T} \rho_{(-)}) = \text{Dét}[1 + i(\bar{T} - T) \rho_{(-)} + T \rho_{(-)} \bar{T} \rho_{(-)}] ;$$

la relation d'unitarité (18) et l'expression (20) de $G_O - \bar{G}_O$ nous permettent de remplacer $T - \bar{T}$ par $-i T(\rho_{(+)} + \rho_{(-)}) \bar{T}$ dans l'expression ci-dessus. Si bien que nous obtenons finalement :

$$|S_O(A)|^{-2} = \text{Dét}[1 - T \rho_{(+)} \bar{T} \rho_{(-)}] = \exp \text{Tr} \log[1 - T \rho_{(+)} \bar{T} \rho_{(-)}] \quad (26)$$

c'est-à-dire pour la probabilité totale de création de paires,

$$\int d^4x w_F(x) = \int d^4x \text{tr} (x | \log(1 - T \rho_{(+)} \bar{T} \rho_{(-)}) | x) \quad (27)$$

Il est intéressant de faire, à propos de cette formule (27), un certain nombre de remarques :

i) La probabilité y est exprimée à l'aide d'éléments de matrice sur la couche de masse. Si l'on veut construire pour $w(x)$, une série de perturbations, il faut commencer par développer le logarithme, puis la matrice T . Il n'y a plus alors aucune singularité : $w(x)$ est explicitement réel et les opérateurs $\rho_{(\pm)}$ qui sont apparus correspondent aux prescriptions correctes

qu'il fallait trouver pour prendre la partie réelle du développement que l'on peut construire à partir de l'expression (14).

ii) Il existe pour la probabilité d'ionisation d'un atome, une formule analogue à (27). La comparaison est instructive. Soient $|0\rangle, |1\rangle, \dots |n\rangle, \dots$ les états liés de l'atome en l'absence de champ électrique, et Q le projecteur sur les états du continu : $Q = 1 - \sum_n |n\rangle \langle n|$. Au temps $-\infty$ le système est dans l'état fondamental $|0\rangle$; le champ électrique est alors introduit puis coupé au bout d'un temps très long de la même façon qu'auparavant. La probabilité totale d'ionisation est donnée par une formule analogue :

$$e^{-W_I} = \sum_{\text{nliés}} |\langle n | S | 0 \rangle|^2 = \sum_n \langle 0 | S^\dagger | n \rangle \langle n | S | 0 \rangle .$$

Les démonstrations sont ici beaucoup plus rapides ; remplaçant $\sum_n |n\rangle \langle n|$ par $1-Q$, grâce à l'unitarité de la matrice S , nous obtenons :

$$e^{-W_I} = 1 - \langle 0 | S^\dagger Q S | 0 \rangle = 1 - \text{Tr}(P_0 S^\dagger Q S)$$

où nous avons posé $P_0 = |0\rangle \langle 0|$. Définissant T par $S = 1+T$ l'orthogonalité de P_0 et Q conduit à :

$$W_I = - \log[1 - \text{Tr}(P_0 T^\dagger Q T)] ;$$

P_0 est un projecteur sur un seul état ; cela entraîne que $\text{Tr}(P_0 M)^n = (\text{Tr } P_0 M)^n = (\langle 0 | M | 0 \rangle)^n$ de sorte que l'on peut écrire :

$$W_I = - \text{Tr} \log(1 - T P_0 T^\dagger Q) .$$

La comparaison avec (27) est ainsi mise en évidence : P_0 et Q projecteurs sur les états initialement et finalement occupés sont remplacés dans le problème de la création de paires par $\rho_{(-)}$ et $\rho_{(+)}$ qui projettent sur les états d'énergie négative et positive. Nous retrouvons ici l'image intuitive du champ électrique faisant transiter une particule occupant la mer de Fermi

des états d'énergie négative, jusqu'à un état d'énergie positive.

iii) Bien que l'unitarité nous assure de la positivité de la probabilité, la formule (27) ne le montre pas explicitement. Pour s'en convaincre il suffit d'explicitier le rôle des opérateurs $\rho_{(+)}$, qui limitent les éléments de matrice qui interviennent à la couche de masse. Il faut donc définir un opérateur t qui agit sur des impulsions variant sur l'hyperboloïde de masse, et dont les seuls éléments de matrice qui interviennent dans (27) relient un vecteur pris sur la nappe supérieure à un vecteur de l'autre nappe par :

$$\langle \vec{p}\alpha | t | \vec{p}'\beta \rangle = (2\pi) \bar{u}(\vec{p}, \alpha) T v(\vec{p}', \beta) \frac{m}{\sqrt{\omega_p \omega_{p'}}} \quad (28)$$

où $\omega_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$, et où u et v désignent les solutions d'énergie positive et négative de l'équation de Dirac dont la normalisation est fixée par

$$\begin{aligned} \bar{u}(\vec{p}, \alpha) u(\vec{p}, \beta) &= \delta_{\alpha\beta} \quad \alpha = 1, 2 \\ \bar{v}(\vec{p}, \alpha) v(\vec{p}, \beta) &= -\delta_{\alpha\beta} \quad \alpha = 1, 2 \end{aligned} .$$

A l'aide de cet opérateur t on peut écrire (27) :

$$\int d^4x w_F(x) = \sum_{\alpha=1,2} \int d^3p \langle \vec{p}\alpha | \log(1+tt^+) | \vec{p}\alpha \rangle ,$$

qui est bien positif car l'opérateur $\log(1+tt^+)$ est semi-défini positif.

iv) Les ordres successifs de la théorie des perturbations peuvent, comme nous l'avons dit, être construits sans ambiguïté en développant l'expression (27). Nous ne donnerons ici que le résultat de l'ordre le plus bas obtenu en ne gardant que le premier terme du développement du logarithme, et en remplaçant T par eA :

$$W^{(1)} = -\text{Tr} \left[eA \rho_{(+)} eA \rho_{(-)} \right] = \frac{\alpha}{\pi} \int d^4q \delta^{(4)}(q-p_1-p_2) \int \frac{d^3p_1 d^3p_2}{2\omega_1 2\omega_2} \text{tr} \left[(\not{p}_1 + m) A(q) (\not{p}_2 - m) A(-q) \right]$$

Tous calculs faits on trouve

$$W^{(1)} = \frac{\alpha}{3} \int d^4 q \theta(q^2 - 4m^2) \left\{ |E(q)|^2 - |H(q)|^2 \right\} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} \left(1 + \frac{2m^2}{q^2} \right) . \quad (29)$$

Notons que dans l'intégrale (29) q^2 étant du genre temps, il existe un référentiel où $\vec{q}$ et donc $H(q)$ s'annulent de sorte que l'invariant $E^2 - H^2$ est bien positif.

Supposons le champ monochromatique de fréquence ω . Nous vérifions sur l'expression (29) que $W^{(1)}$ s'annule sauf si $\omega \geq 2m$. Le même phénomène se produit à l'ordre n : $W^{(n)}$ est nul si $n\omega$ est inférieur à $2m$, $W^{(n)}$ n'étant non nul que lorsque les n photons apportent au moins l'énergie $2m$ d'une paire produite au repos.

v) En réalité la formule (27) peut être comprise comme une vérification explicite de l'unitarité de l'opérateur de champ S défini en (2). Cette relation met en jeu des états d'un nombre arbitraire de corps (alors que l'équation (18) sur la matrice de diffusion T ne portait que sur des états à une particule). En effet décomposons l'état $S|0\rangle$ sur tous les états possibles

$$S|0\rangle = S_0|0\rangle + \sum_{\alpha} S_{1\alpha}|1\alpha\rangle + \dots + \sum_{\alpha} S_{n\alpha}|n\alpha\rangle + \dots ;$$

$|n\alpha\rangle$ désigne un état à n paires où α représente l'ensemble des impulsions et spins des $2n$ particules. Le coefficient $S_{n\alpha}$ s'obtient en prenant l'élément de matrice S :

$$S_{n\alpha} = \langle n\alpha | S | 0 \rangle = \langle 0 | S | 0 \rangle \langle n\alpha | S | 0 \rangle_C .$$

La dernière égalité s'obtient en factorisant les diagrammes disconnectés fermés dans le développement de $\langle n\alpha | S | 0 \rangle$; $\langle n\alpha | S | 0 \rangle_C$ est égal à l'ensemble des "diagrammes liés" aux lignes des $2n$ particules. Etudions d'abord

$$|S_1|^2 = \sum_{\alpha} |S_{1\alpha}|^2 = |S_0|^2 \sum_{\alpha} |\langle 1\alpha | S | 0 \rangle_C|^2 .$$

La somme des modules carrés des diagrammes connexes correspond à la partie imaginaire des diagrammes à une boucle.

Explicitement

$$|S_1|^2 = |S_0|^2 \int d^3 p_1 d^3 p_2 (2\pi)^2 \frac{m^2}{\omega_1 \omega_2} \sum_{\alpha, \beta=1}^2 |\bar{u}(p_1, \alpha) T v(-p_2, \beta)|^2 ,$$

et avec la normalisation des spineurs que nous avons choisis nous trouvons :

$$|S_1|^2 = -|S_0|^2 \text{Tr} [\bar{T} \rho_{(+)} \bar{T} \rho_{(-)}] = |S_0|^2 \text{Tr}' (tt^+) . \quad (30)$$

La matrice t est définie par l'équation (28). Le symbole Tr' représente l'opération $\text{Tr}' M = \sum_{\alpha=1,2} \int d^3 p (\alpha \vec{p} | M | \alpha \vec{p})$.

Le calcul de $|S_n|^2 = \sum |S_{n\alpha}|^2$ est tout-à-fait semblable, mais il ne faut pas oublier, dans les états à n paires, d'antisymétriser les électrons entre eux, ainsi que les positrons. D'autre part la sommation sur les états finaux ne doit porter que sur des évènements distincts ; si on somme librement sur les spins et impulsions des n électrons et n positrons, on doit corriger l'erreur commise en divisant par $(1/n!)^2$.

Ainsi :

$$|S_n|^2 = |S_0|^2 \int \frac{d^3 p_1 \dots d^3 p_n d^3 p'_1 \dots d^3 p'_n}{(n!)^2} \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_n=1}^2 \sum_{\beta_1 \dots \beta_n=1}^2 \frac{(2\pi)^{2n} m^{2n}}{\omega_1 \dots \omega_n \omega'_1 \dots \omega'_n} \left| \sum_{\mathcal{P}} \frac{(-)^{\mathcal{P}}}{\sqrt{n!}} \bar{u}_{\mathcal{P}(p_1 \alpha_1)} \dots \bar{u}_{\mathcal{P}(p_n \alpha_n)}^T \otimes \dots \otimes T \sum_{\mathcal{Q}} \frac{(-)^{\mathcal{Q}}}{\sqrt{n!}} v_{\mathcal{Q}(p'_1 \beta_1)} \dots v_{\mathcal{Q}(p'_n \beta_n)} \right|^2 .$$

Les sommes sur les permutations $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ développées engendrent $n!$ fois le même produit de n éléments de matrice. Cela compense les deux facteurs $1/\sqrt{n!}$ et réintroduisant la matrice t définie en (28), nous avons

$$\begin{aligned}
 |s_n|^2 &= |s_o|^2 \sum_{\substack{\alpha_1 \dots \alpha_n \\ \beta_1 \dots \beta_n}} \int \frac{d^3 p_1 \dots d^3 p_n \dots d^3 p'_n}{(n!)^2} \left| t \begin{pmatrix} p_1 \alpha_1 \dots p_n \alpha_n \\ p'_1 \beta_1 \dots p'_n \beta_n \end{pmatrix} \right|^2 \\
 &= |s_o|^2 \sum_{\substack{\alpha_1 \dots \alpha_n \\ \beta_1 \dots \beta_n}} \int \frac{d^3 p_1 \dots d^3 p'_n}{(n!)^2} t \begin{pmatrix} p_1 \alpha_1 \dots p_n \alpha_n \\ p'_1 \beta_1 \dots p'_n \beta_n \end{pmatrix} t^+ \begin{pmatrix} p'_1 \beta_1 \dots p'_n \beta_n \\ p_1 \alpha_1 \dots p_n \alpha_n \end{pmatrix} .
 \end{aligned}$$

Il est maintenant facile de vérifier que pour deux matrices arbitraires U et V

$$\sum_{j_1 \dots j_n} U \begin{pmatrix} i_1 \dots i_n \\ j_1 \dots j_n \end{pmatrix} V \begin{pmatrix} j_1 \dots j_n \\ k_1 \dots k_n \end{pmatrix} = n! (UV) \begin{pmatrix} i_1 \dots i_n \\ k_1 \dots k_n \end{pmatrix} .$$

Finalement donc

$$|s_n|^2 = |s_o|^2 \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \int \frac{d^3 p_1 \dots d^3 p_n}{n!} (tt^+) \begin{pmatrix} p_1 \alpha_1 \dots p_n \alpha_n \\ p_1 \alpha_1 \dots p_n \alpha_n \end{pmatrix}$$

La conservation de la probabilité est contenue dans le fait qu'on a créé soit 0, soit 1, ..., soit n paires, etc ... ; elle est donc équivalente à la relation :

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} |s_n|^2 = |s_o|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^3 p_1 \dots d^3 p_n \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_n} (tt^+) \begin{pmatrix} p_1 \alpha_1 \dots p_n \alpha_n \\ p_1 \alpha_1 \dots p_n \alpha_n \end{pmatrix} .$$

La somme sur n reconstitue le développement de Fredholm du déterminant de la matrice $(1+tt^+)$. Finalement nous retrouvons la formule (26) sous la forme :

$$|s_o|^{-2} = \text{Dét}'(1+tt^+) = \text{Dét}(1-T \rho_{(+)} \bar{T} \rho_{(-)}) .$$

Le premier déterminant s'applique à des opérateurs restreints à la couche de masse. Dans le second le produit des opérateurs est entendu, en sommant librement sur les quadri-impulsions.

b) Particules de Klein-Gordon

Le cas où les paires de particules créées sont des bosons de spin zéro se traite naturellement de façon semblable. Nous nous bornerons à donner un résumé des formules analogues en mentionnant au passage les quelques différences qui méritent d'être notées.

Le Lagrangien d'interaction se déduit de la règle du couplage minimal et s'écrit :

$$\mathcal{L}_I(X) = ie A^\mu(x) \Phi^+(x) \overleftrightarrow{\partial}_\mu \Phi(x) + e^2 A^2(x) \Phi^+(x) \Phi(x) ,$$

où $\Phi(x)$ est un champ scalaire chargé.

L'élément vide-vide de la matrice $S_0(A)$ devient

$$S_0(A) = \left[\text{Dét } G^{-1} G_0 \right]^{-1} , \quad (8')$$

où les propagateurs G_0 et G sont ici :

$$G_0 = \frac{1}{P^2 - m^2 + i\epsilon} , \quad G = \frac{1}{(P-eA)^2 - m^2 + i\epsilon} .$$

C'est donc l'inverse du déterminant qui apparaissait dans le cas des fermions qui intervient ici. Il est intéressant d'indiquer rapidement les raisons de cette inversion. En théorie des perturbations c'est tout-à-fait évident : $S_0(A)$ est toujours l'exponentielle des boucles connexes, mais une boucle fermée de bosons est affectée d'un signe plus (alors que pour les fermions il y avait un facteur moins un). Les logarithmes de $S_0(A)$ ont donc des signes opposés dans les deux cas considérés.

Reprenons la démonstration algébrique qui consiste à développer brutalement la matrice S et à appliquer le théorème de Wick ; à l'ordre n nous aurons cette fois non plus un déterminant, mais un permanent. Cependant une somme de permanents peut-être resommée par une formule tout-à-fait analogue à celle de Fredholm ; la comparaison des deux développements explique

la différence entre (8) et (8') :

$$\text{Dét } [1+M] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{i_1 \dots i_n} M \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_n \\ i_1 & \dots & i_n \end{pmatrix} \quad (31)$$

$$\frac{1}{\text{Dét } [1+M]} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n}{n!} \sum_{i_1 \dots i_n} M \begin{bmatrix} i_1 & \dots & i_n \\ i_1 & \dots & i_n \end{bmatrix}$$

où $M \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_n \\ i_1 & \dots & i_n \end{pmatrix}$ et $M \begin{bmatrix} i_1 & \dots & i_n \\ i_1 & \dots & i_n \end{bmatrix}$ désignent respectivement le déterminant et le permanent de la matrice dont l'élément de la p-ième ligne et de la q-ième colonne est $M_{i_p i_q}$.

On peut aussi montrer cela en écrivant $S_0(A)$ sous forme d'une intégrale fonctionnelle. Posant $V(X) = G_0^{-1} - G^{-1}$ nous avons :

$$S_0(A) = \langle 0 | T \exp -i \int \Phi^+(x) V(x) \Phi(x) d^4x | 0 \rangle = \frac{\int \Phi(x) \Phi^*(x) \exp i \int \Phi^*(x) G^{-1}(A) \Phi(x) d^4x}{\int \Phi(x) \Phi^*(x) \exp i \int \Phi^*(x) G_0^{-1} \Phi(x) d^4x}$$

ce sont des intégrales gaussiennes que l'on peut faire et qui redonnent (8')

$$\text{sous la forme } S_0(A) = \frac{\text{Dét } G_0^{-1}}{\text{Dét } G^{-1}(A)}.$$

Remarque : Il existe également des "intégrales" fonctionnelles pour les champs de fermions^[27]. Elles portent sur des variables qui sont des "scalaires" anti-commutant. En fait ce sont des formes linéaires non positives et ce ne sont donc pas des intégrales. En particulier la différence entre (8) et (8') provient de ce que, pour les fermions, une "intégrale gaussienne" est proportionnelle au déterminant de la matrice caractérisant la forme quadratique à intégrer - et non à son inverse comme pourrait le faire penser un calcul naïf.

Il n'y a plus ensuite de modification importante. Au lieu de (14) nous trouvons :

$$w_B(x) = -2\text{Re} \int_0^\infty \frac{ds}{s} (x | e^{is[(P-eA)^2 - m^2]} - e^{is[P^2 - m^2]} | x) . \quad (14')$$

Tout ce qui concerne l'unitarité est semblable. Les opérateurs de diffusion sont définis par

$$\begin{aligned} T(A) &= V + V G_0 T(A) \\ \bar{T}(A) &= V + V G_0 \bar{T}(A) \quad (\bar{T} = T^\dagger) , \end{aligned} \quad (15')$$

où
$$V = G_0^{-1} - G^{-1} = e[A(X) \cdot P + P \cdot A(X)] - e^2 A^2(X) .$$

Les densités d'état d'énergie positive et négative sont

$$\rho_{(\pm)} = 2\pi \theta(\pm P_0) \delta(P^2 - m^2) . \quad (19')$$

Le module au carré de l'élément de matrice vide-vide est :

$$|S_0(A)|^2 = \text{Dét} \begin{bmatrix} 1 - T & \rho_{(+)} & \bar{T} & \rho_{(-)} \end{bmatrix} ; \quad (26')$$

la différence avec (26) repose encore sur les formules (31). En effet lorsque l'on reprend pour les bosons le calcul de l'unitarité, en explicitant la création de 0, 1, ..., n paires, ..., on doit symétriser les états de n bosons. Cela fait apparaître des permanents que l'on resomme par la deuxième formule (31).

Finalement pour le taux de création nous aurons :

$$w_B(x) = -(x | \log \begin{bmatrix} 1 - T & \rho_{(+)} & \bar{T} & \rho_{(-)} \end{bmatrix} | x) . \quad (27')$$

3 - Création de paires par un champ constant

Nous avons expliqué dans la section précédente le mérite des formules (27) et (27'). Cependant pour calculer le taux de création par un champ constant ces expressions sont inadéquates ; l'amplitude de diffusion n'existe pas car la perturbation s'étend jusqu'à l'infini. La probabilité elle-même diverge. Nous allons partir plutôt des expressions (14) et (14') en les interprétant correctement.

D'autre part comme c'est sous l'effet de l'accélération due au champ qu'en définitive on "ionise le vide", nous supposons le champ purement électrique (une particule chargée ne gagne pas d'énergie dans un champ magnétique constant). Nous utiliserons la jauge :

$$A(X) = (0,0,0,-EX^0) \quad , \quad (32)$$

où E désigne le module du champ électrique.

Notons deux identités dont nous aurons besoin :

i) dans un champ constant

$$\text{tr} \exp \frac{ies}{2} \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 4 \text{ ch seE} \quad ; \quad (33)$$

en effet

$$\exp \frac{ies}{2} \sigma.F = \begin{pmatrix} \exp - \frac{es}{2} \vec{E} \cdot \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \exp \frac{es}{2} \vec{E} \cdot \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

ii) de la relation $[X_0, P_0] = i$, nous déduisons :

$$(P-eA)^2 = (P^0)^2 - (P_1)^2 - (P_2 + eEX^0)^2 = \left(\exp -i \frac{P^0 P^3}{eE} \right) \left[(P^0)^2 - P_1^2 - e^2 E^2 (X^0)^2 \right] \left(\exp i \frac{P^0 P^3}{eE} \right) ; \quad (34)$$

$$(P_1^2 \equiv P_1^2 + P_2^2) \quad .$$

Dans un champ statique et homogène, le problème est invariant par translations d'espace-temps, on s'attend donc à ce que $w(x)$ soit indépendant de x . Reprenons maintenant la formule (14) ; la trace sur les indices de Dirac peut être immédiatement prise selon l'équation (33), puisqu'ici $\sigma.F$ commute avec l'opérateur P . On effectue ensuite la transformation canonique (34), de sorte que

$$\begin{aligned} \text{tr}(x|e^{is[(P-eA)^2 - m^2 + \frac{e}{2}\sigma.F]}|x) &= 4 \text{ch } eEs \int \frac{d^3p \, d\omega d\omega'}{(2\pi)^4} \times \\ &\times \exp\{i[(\omega-\omega')(t+p_3/eE) - is(p_1^2 + m^2)]\}(\omega|e^{is(P_0^2 - e^2 E^2 X_0^2)}|\omega') \\ &= \frac{4\pi eE}{is} \text{ch}(eEs) e^{-ism^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega (\omega|e^{is(P_0^2 - e^2 E^2 X_0^2)}|\omega) \quad . \quad (35) \end{aligned}$$

La deuxième équation (35) est obtenue en intégrant sur $\vec{p}$ et ω' . Les opérateurs P_0 et X_0 ayant les relations de commutation de la position et de l'impulsion la dernière intégrale peut être interprétée comme la trace de l'opérateur d'évolution d'un "oscillateur harmonique" possédant une fréquence imaginaire pure. Cette trace peut se calculer en sommant sur les niveaux discrets, c'est-à-dire que dans la formule :

$$\text{Tr} \exp is \left[P^2/2m + \frac{1}{2} m \omega^2 Q^2 \right] = \sum_0^{\infty} \exp is(n + \frac{1}{2})\omega = \frac{i}{2\sin s\omega/2} \quad ,$$

nous remplaçons m par $1/2$ et ω par $2ieE$, si bien que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' (\omega'| \exp is(P_0^2 - e^2 E^2 X_0^2) |\omega') = \frac{1}{2\text{sh } seE} \quad .$$

Nous en déduisons :

$$w_F = - \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s^2} \left[eE \coth eEs - \frac{1}{s} \right] \text{Re}(ie^{-ism^2}) \quad , \quad (36)$$

qui est bien indépendant de x . Nous avons à dessein, dans la formule (36), gardé l'expression $\text{Re}(ie^{-ism^2})$. Si au lieu de calculer le module de $S_0(A)$

nous nous étions intéressé à sa phase, nous aurions eu la même intégrale avec $\text{Re}(ie^{-ism^2}) = \sin sm^2$ remplacé par $\cos sm^2$. L'intégrale divergerait alors logarithmiquement pour $s=0$, et il serait nécessaire de faire une soustraction. La divergence logarithmique serait absorbée, comme l'a montré Schwinger, dans une renormalisation des champs et des charges. Ici cependant, ce problème ne se présente pas. En ce qui concerne les bosons, il n'y a même pas la trace (33) à faire sur les spins, et nous obtenons une expression semblable avec $4 \text{ ch } eEs$ remplacé par -2 :

$$w_B = \frac{1}{2(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} \left[\frac{eE}{\text{sh } eEs} - \frac{1}{s} \right] \sin sm^2. \quad (36')$$

Les intégrales (36) et (36') se calculent explicitement en fermant le contour d'intégration ; on doit sommer les résidus des pôles dus au sinus hyperbolique. Les expressions finales sont

$$w_F = \frac{\alpha E^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp - \frac{n\pi m^2}{eE} \quad (37)$$

$$w_B = \frac{\alpha E^2}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^{n-1}}{n^2} \exp - \frac{n\pi m^2}{eE}. \quad (37')$$

Concluons cette section par deux remarques.

i) Même avec les faisceaux les plus intenses, aujourd'hui disponibles m^2/eE est un nombre très grand (voir ci-dessous, section 5) et les termes $n > 1$ sont exponentiellement petits par rapport au premier. Par conséquent le rapport entre les taux de création pour les fermions et les bosons est essentiellement un facteur 2 dû au spin. Notons que ce résultat possède bien la singularité en $\exp -1/E$ que nous avons annoncée au début.

ii) Dans la formule (37') pour les bosons, nous voyons que les termes successifs ont des signes alternés. Cela démontre qu'on ne peut pas interpréter le n -ième terme comme la probabilité de créer n paires.

4 - Champ alternatif

Nous voulons maintenant estimer en pratique la probabilité d'émission de paires dans un champ oscillant. Il se trouve que grâce au fait que deux des paramètres du problème sont petits, il est possible de justifier des approximations qui permettent de mettre sous une forme calculable les expressions théoriques précédentes, valables dans un champ arbitraire. Nous demandons évidemment aux formules finales d'être en accord, dans la limite où la fréquence tend vers zéro, avec les résultats (37) du champ constant. D'autre part, pour des champs appliqués faibles, nous devons retrouver les prédictions de la théorie des perturbations. Cela signifie que nous avons à trouver des expressions qui décrivent une interpolation entre une loi en puissances de E , et une loi en exponentielle de $1/E$. Introduisons donc ces hypothèses simplificatrices :

i) En premier lieu, nous nous limiterons à des fréquences $\omega_0 \ll m$. Par conséquent le logarithme de l'expression peut être remplacé par le premier terme de son développement. Les termes successifs ont en effet des seuils de création de plus en plus élevés. Le second terme par exemple contient quatre opérateurs ρ au lieu de deux pour le premier ; c'est donc la partie imaginaire d'une somme de diagrammes ayant des états intermédiaires à quatre particules, qui seront négligés.

ii) Nous avons vu, à la fin de la section précédente, que le spin n'était essentiellement qu'un facteur de comptage. Par conséquent nous étudierons le problème, un peu plus simple, de la création de bosons chargés.

iii) Finalement nous nous limiterons à un champ oscillant, mais homogène à travers tout l'espace. Certes les variations spatiales du champ peuvent jouer un rôle analogue à celui de la fréquence, mais nous les négligerons pour simplifier. Nous ne faisons en fait que des calculs d'ordre de grandeur.

Dans ces conditions le potentiel vecteur que nous choisirons se réduit à :

$$A(X) = [0, 0, 0, A(t)] \quad . \quad (38)$$

La formule (27'), en retenant l'approximation (i) ci-dessus, nous donne pour la probabilité totale W

$$W = (2\pi)^2 \int d^4 p d^4 q \left| (p|T|q) \right|^2 \theta(q_0) \theta(-p_0) \delta(p^2 - m^2) \delta(q^2 - m^2) .$$

L'invariance par translation d'espace entraîne que la matrice $(p|T|q)$ est diagonale en ce qui concerne les composantes d'espace des impulsions. Cela nous donne pour la probabilité de création par unité de volume

$$\frac{dW}{dV} = \frac{1}{2\pi} \int \frac{d^3 p}{(2\omega)^2} \left| (-\omega|T_p|\omega) \right|^2 , \quad \omega = \sqrt{p^2 + m^2} . \quad (39)$$

La matrice T_p qui apparaît dans (39) est la solution de l'équation intégrale

$$T_p = V + V \frac{1}{p_0^2 - \omega^2 + i\epsilon} T_p \quad (40)$$

où :

$$V = -2e p_3 A(X_0) + e^2 A^2(X_0) , \quad [X_0, P_0] = i . \quad (41)$$

Dans ces expressions $\vec{p}$ apparaît comme un paramètre. L'invariance par translation a réduit le problème à une équation de Lippmann-Schwinger à une dimension. Tout se passe comme si nous étudions un problème de diffusion à une dimension où le temps joue le rôle de la variable de configuration habituelle. Le moment conjugué du temps est P_0 . L'élément de matrice $(-\omega|T_p|\omega)$ correspond alors, dans ce langage, à une diffusion vers l'arrière. Rappelons que nous avons supposé que le potentiel $A(t)$ a été introduit puis débranché adiabatiquement, c'est-à-dire que $V(t)$ s'annule lorsque $|t| \rightarrow \infty$, de sorte que T_p est un opérateur bien défini. Or, les éléments de matrice de diffusion sont reliés, très simplement, au comportement asymptotique pour t grand des solutions de l'équation différentielle $(P_0^2 - \omega^2 - V)\psi = 0$, soit

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 + V_p(t) \right] \psi(t) = 0 . \quad (42)$$

C'est là simplement l'équation de Klein-Gordon pour notre problème à une dimension. Nous cherchons maintenant les solutions de diffusion, c'est-à-dire dont le comportement asymptotique est donné par

$$\begin{cases} t \rightarrow -\infty & \psi(t) = e^{-i\omega t} + b e^{i\omega t} \\ t \rightarrow +\infty & \psi(t) = a e^{-i\omega t} \end{cases} \quad (43)$$

Les éléments de matrice T sont reliés à a et b par de simples coefficients de normalisation :

$$\begin{aligned} (-\omega | T_p | \omega) &= \frac{i\omega}{\pi} b \\ (\omega | T_p | \omega) &= \frac{i\omega}{\pi} (a-1) \end{aligned} \quad (44)$$

Notons que l'énergie ω de ce problème est supérieure à (ou de l'ordre de) m , c'est-à-dire qu'elle est très grande et que nous allons appliquer ici la méthode B.K.W. dans sa version adaptée aux problèmes de diffusion que nous avons discutée au premier chapitre.

En premier nous introduirons donc la "fréquence variable" $\omega(t)$ définie par :

$$\omega(t) = (\omega^2 + V_p(t))^{1/2} = [m^2 + p_1^2 + (p_3 - eA(t))^2]^{1/2} \quad (45)$$

Nous avons vu que l'approximation classique peut être retenue lorsque $\omega(t)$ est lentement variable, c'est-à-dire lorsque le rapport sans dimension $\dot{\omega}(t)/\omega^2(t)$ est beaucoup plus petit que un. Ce rapport est ici :

$$\frac{\dot{\omega}(t)}{\omega^2(t)} = \frac{e E(t) [p_3 - eA(t)]}{[m^2 + p_1^2 + (p_3 - eA(t))^2]^{3/2}} \quad .$$

Utilisant l'inégalité simple

$$\left| \frac{x}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \right| < \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{1}{a^2} < \frac{1}{a^2} \quad ,$$

nous avons

$$\left| \frac{\dot{\omega}(t)}{\omega^2(t)} \right| < \frac{eE}{m^2 + p_{\perp}^2} < \frac{eE}{m^2}$$

où E est l'amplitude du champ oscillant. Par conséquent, nous supposons dans la suite des calculs $\frac{eE}{2m}$ petit ; tous les faisceaux de laser existant satisfont très largement cette condition. La méthode à suivre consiste donc à poser :

$$\psi(t) = \alpha(t) e^{-i\chi(t)} + \beta(t) e^{i\chi(t)} \quad (46)$$

avec

$$\chi(t) = \int_0^t dt' \omega(t') \quad . \quad (47)$$

Les conditions aux limites (43), traduites sur les fonctions α et β , s'écrivent :

$$\alpha(-\infty) = 1, \quad \beta(+\infty) = 0 \quad , \quad (48)$$

et l'identification du comportement asymptotique des formes (46) et (43) donne :

$$\begin{cases} a = \alpha(+\infty) \exp - i \int_{-\infty}^{+\infty} dt [\omega(t) - \omega] \\ b = \beta(-\infty) \exp - 2i \int_{-\infty}^0 dt [\omega(t) - \omega] \end{cases} \quad (49)$$

Les fonctions $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ satisfont le système, équivalent à l'équation initiale (42) :

$$\begin{cases} \dot{\alpha}(t) = - \frac{\dot{\omega}(t)}{2\omega(t)} (\alpha - \beta e^{2i\chi}) \\ \dot{\beta}(t) = - \frac{\dot{\omega}(t)}{2\omega(t)} (\beta - \alpha e^{-2i\chi}) \end{cases} \quad (50)$$

L'hypothèse adiabatique entraîne la nullité de $\dot{\omega}(t)$ lorsque $|t| \rightarrow \infty$, $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ tendent donc vers des constantes pour des temps grands. L'approximation d'ordre le plus bas aux solutions de ce système, discutée dans le premier chapitre, consiste à négliger les termes ayant en facteur les phases rapidement variables $\exp \pm 2i\chi$. Compte tenu des conditions aux limites, l'ordre le plus bas est :

$$\begin{cases} \alpha^{(0)}(t) = \sqrt{\frac{\omega}{\omega(t)}} \\ \beta^{(0)}(t) = 0 \end{cases} \quad (51)$$

A travers les équations (44) et (49), nous voyons que, lorsque $\beta^{(0)} = 0$, l'amplitude de diffusion en arrière - et par conséquent la probabilité de création de paires - s'annulent. Il faut donc aller plus loin dans la résolution du système (50). Pour cela nous réporterons la solution $\alpha^{(0)}(t)$ dans la deuxième équation (50) pour la fonction $\beta(t)$ que nous sommes alors en mesure de résoudre, puisqu'elle est du premier ordre. Nous trouvons ainsi :

$$\beta(t) \equiv -\frac{1}{2} \int_t^\infty dt' \frac{\dot{\omega}(t')}{\omega(t')} e^{-2i\chi(t')} \quad (52)$$

Des relations (44) et (49) nous tirons $(\omega|T_p|-\omega)$ puis de (39) la probabilité par unité de volume

$$\frac{dW}{dV} = \frac{1}{4} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{\dot{\omega}(t)}{\omega(t)} e^{-2i\chi(t)} \right|^2 \quad (53)$$

Remarque :

Afin de nous convaincre que les facteurs numériques sont corrects, extrayons de (53), le développement d'ordre le plus bas dans le champ. Au premier ordre $\frac{\dot{\omega}(t)}{\omega(t)} e^{-2i\chi(t)} \sim \frac{e^{p_3} E(t)}{\omega^2} e^{-2i\omega t}$, de sorte que :

$$\frac{dW^{(1)}}{dV} = \frac{1}{4} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{e^{2p_3}}{\omega^4} (2\pi)^2 |\tilde{E}(2\omega)|^2 \quad \text{où} \quad \tilde{E}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{2\pi} e^{-i\omega t} E(t) \quad .$$

Intégrant sur les angles nous trouvons :

$$\frac{dW^{(1)}}{dV} = \frac{\pi\alpha}{3} \int_{2m}^{\infty} d\omega \left(1 - \frac{4m^2}{\omega^2}\right)^{3/2} |\tilde{E}(\omega)|^2 .$$

Ce résultat coïncide avec celui du calcul direct qui avait été fait en (28), dans le cas d'un champ homogène.

Il nous faut maintenant définir une probabilité par unité de temps. Dans ce but, nous allons supposer que le champ et son potentiel vecteur s'annulent en dehors de l'intervalle $-T/2, T/2$. Le taux de création de paires, par unité de volume et par unité de temps est donc défini par :

$$w = \frac{dW}{dVdt} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left| \int_{-T/2}^{T/2} dt \frac{\dot{\omega}(t)}{2\omega(t)} e^{-2i\chi(t)} \right|^2 . \quad (54)$$

Durant l'intervalle de temps $(-T/2, T/2)$ nous supposons que le champ est périodique et même monochromatique ; nous prendrons :

$$A(t) = \frac{E}{\omega_0} \cos \omega_0 t . \quad (55)$$

Alors la "fréquence"

$$\omega(t) = \left[m^2 + p_1^2 + \left(p_3 - \frac{eE}{\omega_0} \cos \omega_0 t \right)^2 \right]^{1/2} .$$

est elle-même périodique, et sa primitive $\chi(t)$ est la somme d'une fonction périodique, et d'une fonction linéaire :

$$\chi(t) = \int_0^t dt' \omega(t') = \Omega t + \Phi(t) . \quad (56)$$

La fonction $\Phi(t)$ a donc cette même période ω_0 ; quant à Ω , c'est une fréquence renormalisée par le champ dont l'expression est l'intégrale elliptique :

$$\Omega = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2\pi} \left[m^2 + p_1^2 + \left(p_3 - \frac{eE}{\omega_0} \cos x \right)^2 \right]^{1/2} . \quad (57)$$

Afin de prendre explicitement dans (54) la limite sur T , nous développons la fonction périodique $\frac{\dot{\omega}(t)}{\omega(t)} e^{-2i\Phi(t)}$ en série de Fourier :

$$\frac{\dot{\omega}(t)}{\omega(t)} e^{-2i\Phi(t)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n e^{in\omega_0 t}$$

Utilisant ce développement nous écrivons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \left| \int_{-T/2}^{T/2} dt \frac{\dot{\omega}(t)}{\omega(t)} e^{-2i\chi(t)} \right|^2 &= \frac{1}{T} \left| \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n \int_{-T/2}^{+T/2} e^{i(n\omega_0 - 2\Omega)t} dt \right|^2 \\ &= \frac{1}{T} \sum_{nm} C_n C_m^* \left\{ \frac{[e^{i(2\Omega - n\omega_0)T} - 1][e^{-i(2\Omega - m\omega_0)T} - 1]}{(2\Omega - n\omega_0)(2\Omega - m\omega_0)} \right\} . \end{aligned}$$

Il est facile de voir, par son action sur une fonction d'essai, que l'accolade ci-dessus a pour limite la distribution $2\pi T \delta_{nm} \delta(2\Omega - n\omega_0)$. La limite pour T tendant vers l'infini est donc prise lorsque nous écrivons :

$$w = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2 \delta(2\Omega - n\omega_0) . \quad (58)$$

L'interprétation physique est claire : il faut que n quanta d'énergie ω_0 parviennent à atteindre l'énergie 2Ω , énergie d'une paire (renormalisée par la présence du champ). D'autre part le rapport $2\Omega/\omega_0$ est supérieur ou de l'ordre de m/ω_0 qui est beaucoup plus grand que un. On peut donc remplacer la somme sur n par une intégrale. En supposant $2\Omega/\omega_0$ entier (c'est un nombre très grand et on peut toujours supposer toutes les énergies mesurées ici en unités ω_0), nous aboutissons aux formules :

$$w = \omega_0 \left(\frac{eE}{2\omega_0} \right)^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^2} |c|^2 \quad (59)$$

où le coefficient de Fourier c s'écrit :

$$c = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{dx}{2\pi} \frac{\sin x(p_3 - \frac{eE}{\omega_0} \cos x)}{m^2 + p_\perp^2 + (p_3 - \frac{eE}{\omega_0} \cos x)^2} \exp \frac{2i}{\omega_0} \int_0^x dx' \left[m^2 + p_\perp^2 + (p_3 - \frac{eE}{\omega_0} \cos x')^2 \right]^{1/2}$$

Avant de procéder à l'évaluation des intégrales indiquées, il est intéressant de savoir ce que ces formules prédisent dans la limite $\omega_0 = 0$ du champ constant et de comparer avec le résultat (37). Après quelques changements de variables, on obtient, partant des expressions (59) dans la limite où ω_0 tend vers zéro :

$$w = \frac{\alpha E^2}{8\pi} \int_{m^2/eE}^{\infty} dx |I|^2$$

avec

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi \operatorname{th} \varphi \exp ix(\varphi + \frac{\operatorname{sh} 2\varphi}{2})$$

L'intégrale sur φ contient une phase rapidement oscillante puisque le coefficient x est supérieur à m^2/eE qui est beaucoup plus grand que un. Nous évaluons donc I par la méthode du col qui fournit l'évaluation asymptotique $I \simeq \frac{2i\pi}{3} e^{-\frac{\pi x}{2}}$. Nous pouvons ensuite intégrer sur x , et nous obtenons :

$$w = \frac{\pi^2}{9} \frac{\alpha E^2}{2\pi} \exp - \frac{\pi m^2}{eE} \quad (60)$$

Ce résultat nous donne confiance quant aux estimations reposant sur la formule (59). En effet la formule (60) ne diffère du terme principal, calculé exactement en (37'), que par un facteur $\frac{\pi^2}{9}$. Une telle précision est même inutile ici, car nous sommes simplement à la recherche d'un ordre de grandeur.

Nous allons maintenant étudier en général le comportement déduit de (59) pour une fréquence arbitraire. L'intégrale qui définit c (Eq. (59)) contient une phase qui oscille très rapidement avec des fréquences de l'ordre de m/ω_0 . Il est donc nécessaire pour l'évaluer de déformer le contour dans le plan complexe de la variable x , en appliquant la méthode du col. Comme nous allons le voir, il n'y a pas ici de col ; ce sont les singularités de la fonction à intégrer qui dominent le comportement de l'intégrale (l'expression anglaise "steepest descent method" conviendrait mieux ici).

Il faut opérer en prenant quelques précautions car au voisinage des points intéressants, nous aurons à la fois des points de branchement et des pôles. La fonction de x à intégrer est périodique, de période 2π , $2\Omega/\omega_0$ étant supposé entier. Dans la bande $-\pi \leq \operatorname{Re} x \leq +\pi$, il existe quatre points de branchement situés aux zéros de $[m^2 + p_1^2 + (p_3 - \frac{eE}{\omega_0} \cos x)^2]$. Nous les appellerons respectivement $x_0, \bar{x}_0, -x_0, -\bar{x}_0$, où x_0 est le zéro dont la partie réelle et la partie imaginaire sont positives (voir la figure 7), c'est-à-dire :

$$p_3 - \frac{eE}{\omega_0} \cos x_0 = i(m^2 + p_1^2)^{1/2} \quad 0 < \operatorname{Re} x_0 < \pi/2 \quad 0 < \operatorname{Im} x_0 \quad . \quad (61)$$

Nous avons supposé $p_3 > 0$ dans l'équation (61), car $|c|^2$ est une fonction paire de p_3 .

Grâce à la périodicité de la fonction à intégrer, nous pouvons calculer c en permettant aux extrémités du contour d'intégration de se déplacer parallèlement en prenant les valeurs $-\pi + i\lambda$ et $\pi + i\lambda$ avec λ réel et arbitraire. Dans ce processus de déformation, pôles et coupures nous empêchent de pousser le contour jusqu'à l'infini. Nous déformerons le contour en le déplaçant dans le demi-plan supérieur. Les coupures seront choisies le long des courbes d'égal module de l'exponentielle.

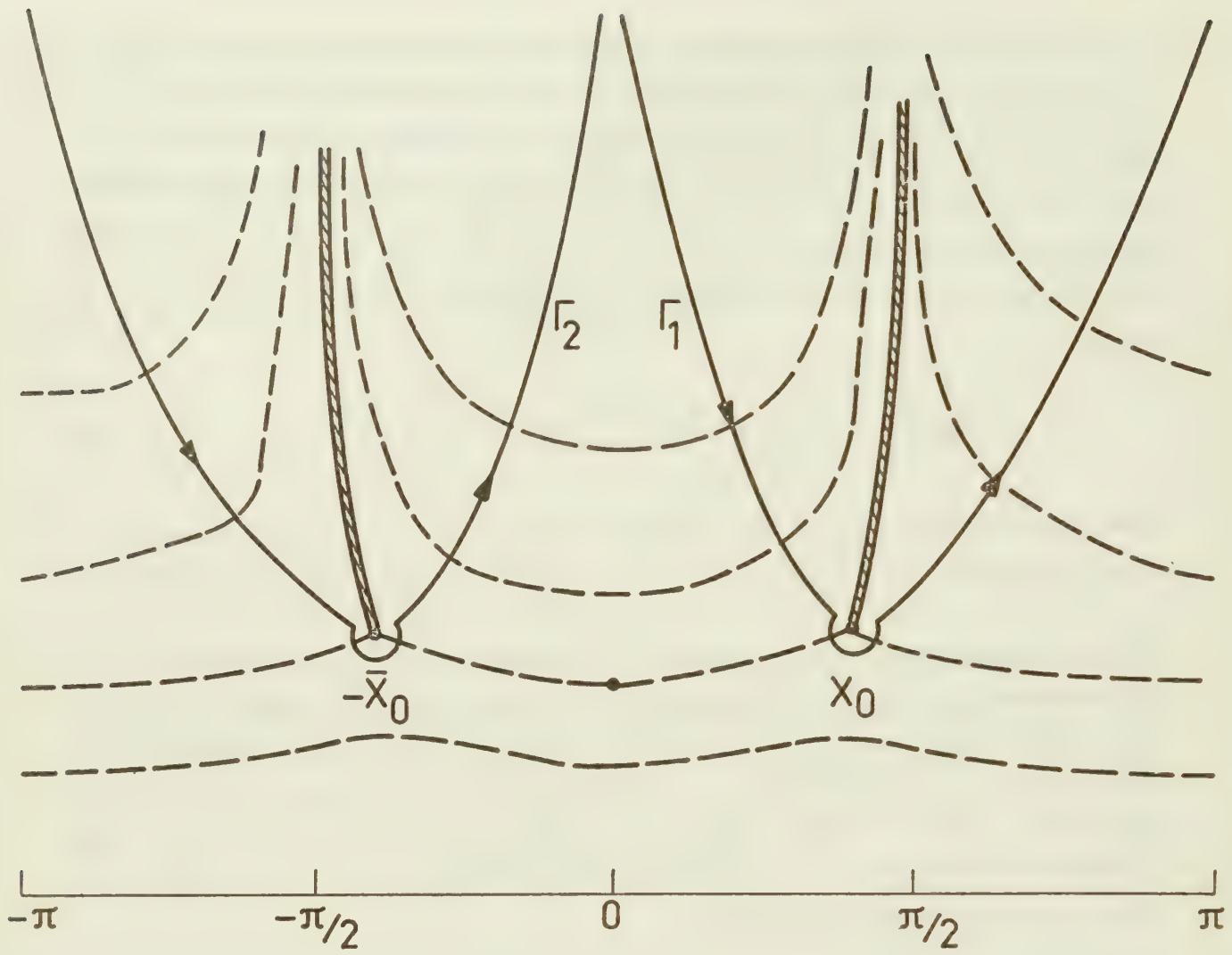


FIG 7



La coupure partant du point de branchement x_0 par exemple sera la courbe définie par $\text{Im} \int_{x_0}^x dx' \left[m^2 + p_\perp^2 + \left(p_3 - \frac{eE}{\omega_0} \cos x' \right)^2 \right]^{1/2} = 0$, le long de laquelle l'exponentielle a un module unité. Dans toutes les autres directions la fonction décroît très rapidement. Sur la figure (7) nous avons schématisé les courbes d'égal module en pointillé. Le segment réel $(-\pi, +\pi)$ constitue, avec les deux coupures, les courbes où l'exponentielle a son plus grand module égal à l'unité. Au voisinage des singularités l'exponentielle est stationnaire. Par conséquent les contributions principales à l'intégrale proviennent des voisinages des points x_0 et $-\bar{x}_0$. Mais il y a également en ces points des pôles. La fonction se comporte comme $(x-x_0)^{-1} \exp(x-x_0)^{3/2}$ près de x_0 . Le contour doit donc éviter les points x_0 et $-\bar{x}_0$ mais passer au voisinage, et il doit se perdre à l'infini dans les vallées en suivant les lignes où la descente est la plus rapide : les thalwegs. Les deux branches des thalwegs situés de part et d'autre de x_0 font entre elles un angle de $2\pi/3$. Le contour est en définitive constitué de deux morceaux, Γ_1 autour de x_0 et Γ_2 autour de $-\bar{x}_0$. Soient c_1 et c_2 les contributions à l'intégrale dues respectivement aux contours Γ_1 et Γ_2 ; on vérifie facilement que $c_2 = -\bar{c}_1$ et donc que

$$c = 2i \text{Im } c_1 \quad . \quad (62)$$

L'intégrale c_1 est calculée en développant la fonction à intégrer au voisinage de x_0 , ce qui est asymptotiquement correct pour $\frac{m^2}{eE} \gg 1$.

Explicitement nous aurons :

$$c_1 \sim \frac{\omega_0}{2eE} \exp \left\{ \frac{2i}{\omega_0} \int_0^{x_0} dx \left[m^2 + p_\perp^2 + \left(p_3 - \frac{eE}{\omega_0} \cos x \right)^2 \right]^{1/2} \right\} \times \\ \times \int_{\Gamma_1} \frac{dx}{2\pi(x-x_0)} \exp \frac{4i}{3\omega_0} (x-x_0)^{3/2} \left(2i \sqrt{p_\perp^2 + m^2} \frac{eE}{\omega_0} \sin x_0 \right)^{1/2} .$$

Par un simple changement de variable la dernière intégrale peut être écrite

$$\int_{\Gamma_1} \frac{dy}{2\pi y} e^{y^{3/2}} .$$

Le contour $\tilde{\Gamma}_1$ est représenté sur la figure (8).

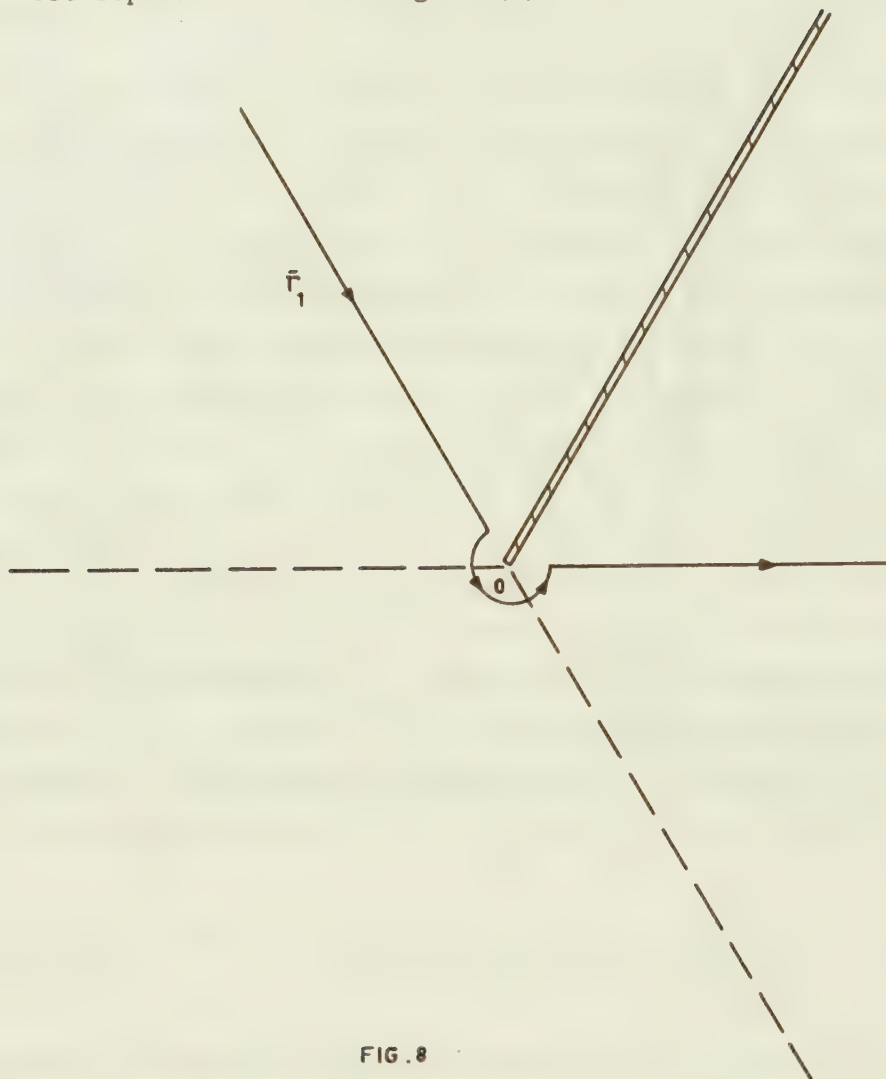


FIG. 8

La transformation conforme $u=y^{3/2}$ transforme le contour $\tilde{\Gamma}_1$ en un circuit décrit positivement autour de l'origine dans le plan des u , commençant et se terminant à moins l'infini.

$$\int_{\tilde{\Gamma}_1} \frac{dy}{2\pi y} e^{y^{3/2}} = \frac{2}{3} \oint \frac{du}{2\pi u} e^u = \frac{2i}{3} .$$

En définitive nous avons donc :

$$c = \frac{2i\omega_0}{3eE} \operatorname{Re} \exp \frac{2i}{\omega_0} \int_0^{x_0} dx \left[m^2 + p_{\perp}^2 + \left(p_3 - \frac{eE}{\omega_0} \cos x \right)^2 \right]^{1/2} .$$

Il est commode de définir deux quantités réelles A et B par

$$-A + iB = \frac{2i}{\omega_0} \int_0^{x_0} dx \left[m^2 + p_{\perp}^2 + \left(p_3 - \frac{eE}{\omega_0} \cos x \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (63)$$

où les signes ont été choisis pour que A soit positif. Avec cette évaluation de c que nous reportons dans l'équation (59), nous trouvons un taux de création :

$$w = \frac{\omega_0}{9} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^2} e^{-2A} \cos^2 B. \quad (64)$$

Il faut noter principalement dans l'équation (64) la décroissance exponentielle en $\exp(-2A)$ qui indique, comme on pouvait le supposer a priori, que, mis à part des facteurs de seuil sans grande importance, les paires tendent à être émises avec des impulsions petites.

Cela va nous permettre d'estimer (64) de la manière suivante :

i) Nous poserons $p_3 = 0$ tant dans la détermination de x_0 (Eq. (61)) que dans le calcul de A et B. Cela implique évidemment de restreindre les limites d'intégration sur p_3 . Les équations du mouvement classiques nous indiquent que p_3 varie typiquement entre $+\frac{eE}{\omega_0}$ et $-\frac{eE}{\omega_0}$.

ii) Nous remplacerons $\cos^2 B$ par sa valeur moyenne $1/2$. La seule influence de ces simplifications est de multiplier le résultat (64) par un facteur purement numérique. De l'équation (61) nous obtenons maintenant :

$$x_0 = \frac{\pi}{2} + i \operatorname{Arg} \operatorname{sh} \left[\frac{\omega_0}{eE} (m^2 + p_{\perp}^2)^{1/2} \right]. \quad (65)$$

La quantité A qui gouverne principalement le phénomène, s'écrit :

$$A = \frac{2}{\omega_0} \int_0^{\operatorname{Arg} \operatorname{sh} \left[\frac{\omega_0}{eE} (m^2 + p_{\perp}^2)^{1/2} \right]} dx \left[m^2 + p_{\perp}^2 - \frac{e^2 E^2}{\omega_0^2} \operatorname{sh}^2 x \right]^{1/2}.$$

Après le changement de variable d'intégration $y = \frac{eE}{\omega_0} (m^2 + p_\perp^2)^{1/2} \text{sh } x$,

$$A = \frac{2(m^2 + p_\perp^2)}{eE} \int_0^1 dy \left(\frac{1-y^2}{1+y^2 \frac{\omega_0^2 (m^2 + p_\perp^2)}{e^2 E^2}} \right)^{1/2} . \quad (66)$$

Définissons la fonction g de la variable réelle α par l'intégrale

$$g(\alpha) = \frac{4}{\pi} \int_0^1 dy \left(\frac{1-y^2}{1+\alpha^2 y^2} \right)^{1/2} . \quad (67)$$

La normalisation est choisie de telle sorte que $g(0) = 1$; on peut exprimer $g(\alpha)$ à l'aide des intégrales elliptiques complètes, mais cela n'aurait pour nous aucune utilité. Nous obtenons donc, exprimée à l'aide de cette fonction g , la probabilité

$$w \simeq \frac{eE}{36\pi} \int_0^\infty dp^2 \exp \left[-\frac{\pi(m^2 + p^2)}{eE} g\left(\frac{\omega_0}{eE} \sqrt{m^2 + p^2}\right) \right]$$

ou bien, posant $m^2 + p^2 = \left(\frac{eE}{\omega_0}\right)^2 u^2$,

$$w = \frac{eE}{18\pi\omega_0^2} \int_\gamma^\infty du u \exp \left[-\frac{\pi eE}{\omega_0^2} u^2 g(u) \right] . \quad (68)$$

Dans cette dernière expression apparaît le paramètre essentiel de ce problème

$$\gamma = \frac{m\omega_0}{eE} , \quad (69)$$

qui est égal au rapport des deux nombres sans dimension et petits $\frac{\omega_0/m}{eE/m^2}$.

Nous n'avons fait dans tout ce qui a précédé, aucune hypothèse sur les valeurs prises par γ .

Il ne reste plus qu'une dernière étape pour achever ces calculs : l'évaluation asymptotique de l'intégrale (68). En effet, la fonction $u^2 g(u)$ qui apparaît dans l'exponentielle est décroissante de façon monotone, de sorte que dans toute la région d'intégration pour u on a :

$$\frac{eE}{\omega_0} u^2 g(u) \geq \frac{eE}{\omega_0} \gamma^2 g(\gamma) = \frac{m^2}{eE} g(\gamma) .$$

Or, pour γ fini, $g(\gamma)$ est une fraction finie de l'unité et $\frac{m^2}{eE}$ est très grand ; pour γ grand, nous verrons en effet que $g(\gamma) \sim \frac{4}{\pi\gamma} \text{Log} 2\gamma$ et $\frac{m^2}{eE} g(\gamma) \sim \frac{4}{\pi} \frac{m}{\omega_0} \text{Log} 2\gamma$ qui est également très supérieur à un. L'intégrale (68) peut donc être asymptotiquement remplacée par la valeur de l'intégrand en γ , le coefficient étant obtenu en intégrant le développement de la fonction au voisinage de ce point. Nous obtenons ainsi le résultat final :

$$w = \frac{\alpha E^2}{2\pi} \frac{1}{g(\gamma) + \frac{\gamma}{2} g'(\gamma)} \exp - \frac{\pi m^2}{eE} g(\gamma) . \quad (70)$$

où la fonction g a été définie en (67).

5 - Discussion du résultat

Nous allons maintenant discuter la formule finale (70) et faire quelques estimations numériques en nous servant des valeurs existantes pour les fréquences et les champs électriques.

a) Limites des champs forts et des champs faibles

Le paramètre $\gamma = \frac{m\omega_0}{eE}$ décrit la transition entre le régime de champ fort et de basse fréquence ($\gamma \ll 1$ correspond au champ constant), et le régime de champ faible ($\gamma \gg 1$) où la théorie des perturbations s'applique. La courbe $g(\gamma)$ est représentée sur la figure (9) en échelle logarithmique pour γ .

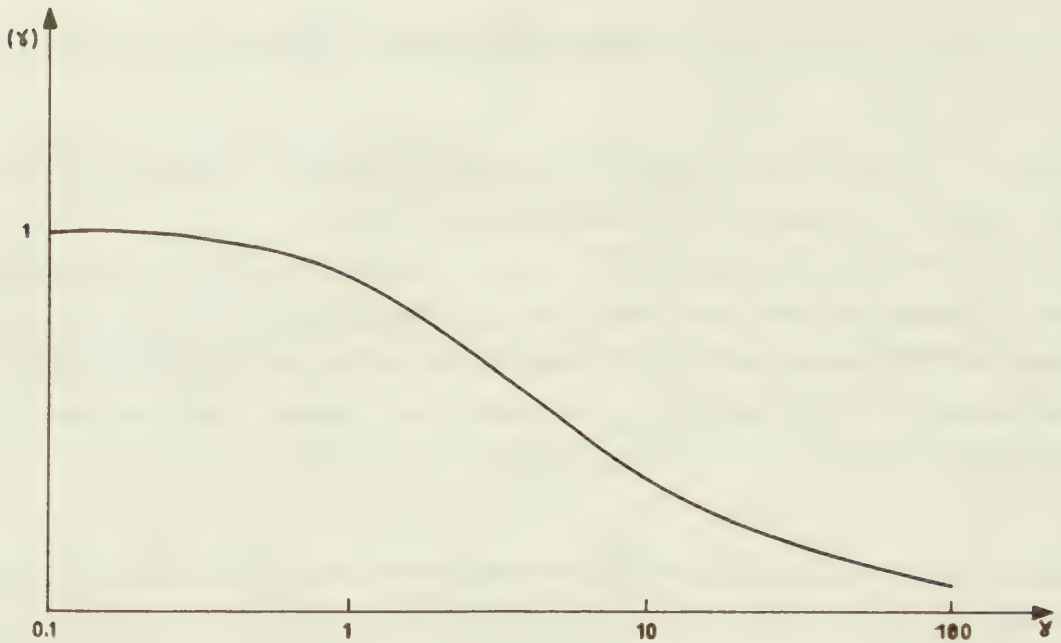


FIG. 9

De la représentation intégrale on déduit aisément que pour

$$\begin{cases} \gamma \ll 1 & g(\gamma) = 1 - \gamma^2/8 + O(\gamma^4) \\ \gamma \gg 1 & g(\gamma) = \frac{4}{\pi\gamma} \text{Log } 2\gamma + O(1/\gamma) \end{cases} .$$

En fait, de façon générale, $g(\gamma)$ est bien représentée par $g(\gamma) \simeq \frac{4}{\pi\gamma} \text{Arg sh } \gamma$; c'est une approximation presque uniforme à l'exception d'un facteur $\pi/4$ pour γ petit. En encadrant dans (67) $\sqrt{1-y^2}$ par $1-y \leq \sqrt{1-y^2} \leq 1$ pour $0 \leq y \leq 1$, nous trouvons pour g des bornes strictes.

$$\frac{4}{\pi\gamma} \left[\text{Arg sh } \gamma - \frac{\sqrt{1+\gamma^2}-1}{\gamma} \right] \leq g(\gamma) \leq \frac{4}{\pi\gamma} \text{Arg sh } \gamma .$$

Par conséquent, nous en déduisons les limites de l'expression (70) de ω dans les deux cas extrêmes :

$$\begin{cases} \gamma \ll 1 & \omega \simeq \frac{\alpha E^2}{2\pi} \exp - \frac{\pi m^2}{eE} \\ \gamma \gg 1 & \omega \simeq \frac{\alpha E^2}{8} \left(\frac{eE}{2m\omega_0} \right)^{4m/\omega_0} \end{cases} .$$

Pour γ petit ce résultat est en accord avec le calcul du champ constant, à un facteur π près. Un tel facteur est parfaitement inessential ici. Il nous indique simplement que les approximations que nous avons faites pour évaluer l'intégrale (64) n'ont introduit que des erreurs dans le coefficient de w . En effet, rappelons qu'avant ces approximations la formule (60) montrait que le modèle que nous employions était correct à un facteur $\pi^2/9$ près.

Pour γ grand (ou bien $\frac{eE}{2m\omega_0} \ll 1$), nous trouvons une amplitude de probabilité proportionnelle au potentiel du champ électrique, élevé à une puissance égale au nombre minimum de photons nécessaires pour produire une paire ; c'est-à-dire $2m/\omega_0$.

Pour γ fini la formule générale (70) interpole entre ces deux situations.

b) Valeurs numériques

Les données les plus optimistes sur les lasers optiques ($\omega_0 \sim 3.10^{15} \text{ sec}^{-1}$) de puissance correspondent à des champs électriques qui atteindront $7.10^{12} \text{ Volt/cm}$. Ces champs extrêmement intenses ne peuvent être obtenus qu'avec des trains d'onde de l'ordre de 10^{-12} sec et sont concentrés dans des volumes de l'ordre de 10^{-9} cm^3 . Nos deux paramètres petits sont, avec ces données :

$$\frac{\hbar\omega_0}{mc^2} \simeq 4.10^{-6} \quad \frac{eE\hbar}{m^2c^3} \sim 3.10^{-4}.$$

Dans ces conditions le paramètre γ est lui aussi petit puisque $\gamma = \frac{m\omega_0 c}{eE} \sim 10^{-2}$.

Ceci indique que la fréquence ne joue aucun rôle. Avec ces valeurs la probabilité de création de paires est nulle avec une précision fantastique puisque nous trouvons $\exp-10^4$. Il faudrait donc disposer de puissances électriques bien plus fortes. On peut, cependant se demander si, les puissances restant ce qu'elles sont, le fait d'augmenter la fréquence pourrait donner une probabilité raisonnable. Sur le plan mathématique, on peut certes vérifier que, si l'intensité du champ est fixée, la probabilité augmente avec la

fréquence (on obtient évidemment le même résultat en échangeant les rôles du champ et de la fréquence). Néanmoins on peut formuler la condition nécessaire pour observer des paires dans le vide, en imposant à l'argument de l'exponentielle qui figure dans la probabilité (70) d'être inférieur à (ou de l'ordre de) un, soit

$$eE \gtrsim \pi m^2 g(\gamma) \quad . \quad (72)$$

Pour traduire plus concrètement cette condition, on peut remplacer $g(\gamma)$ par la forme approchée $\frac{4}{\pi\gamma} \text{Arg sh } \gamma$. La condition (72) devient alors :

$$eE \gtrsim \frac{m\omega_0 c}{\hbar \omega_0 \text{sh} \frac{\omega_0}{4mc^2}} \quad . \quad (73)$$

Nous voyons maintenant, qu'il n'y a rien à espérer en augmentant les fréquences des lasers ; quand bien même disposerait-on de lasers à rayons X, $\frac{\hbar\omega_0}{4mc^2}$ resterait encore très petit. Le sinus hyperbolique est alors équivalent à son argument et la condition (73), nous donne $eE \gtrsim \frac{4m^2 c^3}{\hbar}$.

Donc quel que soit ω , du visible aux rayons X, l'observation de cet effet nécessite des champs ayant la même intensité. Cela demanderait un accroissement gigantesque d'au moins huit ordres de grandeur sur les puissances actuellement envisageables. Bien qu'au cours des dernières années, les progrès en ce sens aient été tout-à-fait considérables, il faudra encore attendre bien longtemps avant qu'un laser fasse claquer le vide.

APPENDICE

Démonstration de deux identités

1) Dans le chapitre II nous avons utilisé l'identité :

$$\begin{aligned} \delta(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) & \sum_{\mathcal{P}(i_1 \dots i_n)} \frac{1}{\alpha_{i_1} - i\epsilon} \frac{1}{\alpha_{i_2} + i_2 - i\epsilon} \dots \frac{1}{\alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \dots + \alpha_{i_{n-1}} - i\epsilon} \\ & = (2i\pi)^{n-1} \delta(\alpha_1) \dots \delta(\alpha_n) \quad ; \end{aligned} \quad (A.1)$$

nous allons maintenant la démontrer. La transformée de Fourier du premier membre $\mathcal{F}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\beta_1 \dots \beta_n) & = \sum_{\mathcal{P}(i_1 \dots i_n)} \int \frac{d\alpha_1 \dots d\alpha_n e^{i \sum_{p=1}^n \alpha_p \beta_p} \delta\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right)}{(\alpha_{i_1} - i\epsilon) \dots (\alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_{n-1}} - i\epsilon)} = \sum_{\mathcal{P}} \int \frac{d\alpha_1 \dots d\alpha_n \delta\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right) e^{i \sum_{p=1}^n \alpha_p \beta_{i_p}}}{(\alpha_1 - i\epsilon) \dots (\alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1} - i\epsilon)} \\ & = \sum_{\mathcal{P}} \int \frac{d\alpha_1 \dots d\alpha_{n-1} e^{i \sum_{p=1}^{n-1} \alpha_p (\beta_{i_p} - \beta_{i_n})}}{(\alpha_1 - i\epsilon) \dots (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1} - i\epsilon)} \end{aligned}$$

Faisons le changement de variables

$$\alpha_1 = u_1 \quad \alpha_2 = u_2 - u_1 \quad \dots \quad \alpha_{n-1} = u_{n-1} - u_{n-2}$$

ou inversement

$$u_1 = \alpha_1 \quad u_2 = \alpha_1 + \alpha_2 \quad u_{n-1} = \alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1} \quad ,$$

dont le jacobien est égal à :

$$\frac{D(\alpha_1 \dots \alpha_{n-1})}{D(u_1 \dots u_{n-1})} = 1 \quad .$$

La fonction $\mathcal{F}$ devient alors un produit d'intégrales :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\beta) &= \sum_{\mathcal{P}} \int \frac{du_1 \dots du_{n-1}}{(u_1 - i\epsilon) \dots (u_{n-1} - i\epsilon)} \exp i \sum_1^{n-1} u_p (\beta_{i_p} - \beta_{i_{p+1}}) \\ &= (2i\pi)^{n-1} \sum_{\mathcal{P}} \theta(\beta_{i_1} > \beta_{i_2} > \dots > \beta_{i_n}) \quad , \end{aligned} \quad (A.2)$$

où nous avons utilisé :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{u - i\epsilon} e^{iux} = 2i\pi \theta(x) \quad ;$$

la notation $\theta(\beta_{i_1} > \beta_{i_2} > \dots > \beta_{i_n})$ désigne le produit $\theta(\beta_{i_1} - \beta_{i_2}) \theta(\beta_{i_2} - \beta_{i_3}) \dots \theta(\beta_{i_{n-1}} - \beta_{i_n})$.

Or, bien évidemment,

$$\sum_{\mathcal{P}} \theta(\beta_{i_1} > \beta_{i_2} > \dots > \beta_{i_n}) = 1 \quad , \text{ soit } \mathcal{F}(\beta_1 \dots \beta_n) = (2i\pi)^{n-1} \quad (A.3)$$

et par transformation de Fourier inverse on en déduit (A.1).

2) Au lieu de prendre n impulsions de somme fixée dans (70), nous aurions pu ne retenir que $(n-1)$ vecteurs indépendants. Nous aurions alors eu à utiliser une identité du même type :

$$\sum_{\mathcal{P}(i_1 \dots i_{n-1})} \frac{1}{\alpha_{i_1} - i\epsilon} \dots \frac{1}{\alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_{n-1}} - i\epsilon} = \frac{1}{\alpha_1 - i\epsilon} \dots \frac{1}{\alpha_{n-1} - i\epsilon} \quad (A.4)$$

La démonstration est tout-à-fait semblable : après transformation de Fourier on effectue le même changement de variables. On trouve

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\beta) &= \int \frac{du_1 \dots du_{n-1}}{(u_1 - i\varepsilon) \dots (u_{n-1} - i\varepsilon)} \sum_{\mathcal{P}} \exp i \left[u_1 (\beta_{i_1} - \beta_{i_2}) + \dots + u_{n-2} (\beta_{i_{n-2}} - \beta_{i_{n-1}}) + u_{n-1} \beta_{i_{n-1}} \right] \\ &= (2i\pi)^{n-1} \sum_{\mathcal{P}} \theta(\beta_{i_1} > \beta_{i_2} > \dots > \beta_{i_{n-1}} > 0) \quad . \end{aligned}$$

La somme sur les permutations construit une fonction qui vaut un si tous les β sont positifs et zéro autrement :

$$\mathcal{F}(\beta) = (2i\pi)^{n-1} \theta(\beta_1) \theta(\beta_2) \dots \theta(\beta_{n-1}) \quad ;$$

par transformation de Fourier inverse on en déduit (A.4).

REFERENCES

- [1] - E.BREZIN, C.ITZYKSON, J.ZINN-JUSTIN : Phys. Rev. D (à paraître)
- [2] - E.BREZIN, C.ITZYKSON : Soumis pour publication à Phys. Rev.
- [3] - H.BETHE, E.SALPETER : Phys. Rev. 84, 1232 (1951)
- [4] - T.FULTON, D.OWEN, W.REPKO : Phys. Rev. Lett. 24, 1035 (1970)
- [5] - G.BREIT : Phys. Rev. 34, 553 (1929) ; 36, 383 (1930) ; 39, 616 (1932)
- [6] - D.BESSIS, M.PUSTERLA : Nuovo Cimento 54A, 243 (1968)
J.L.BASDEVANT, D.BESSIS, J.ZINN-JUSTIN : Nuovo Cimento 60A, 185 (1969)
- [7] - C.ITZYKSON : "Soft Quanta" Ecole d'Eté de Liperi (Finlande) 1969
- [8] - H.CHENG, T.T.WU : Phys. Rev. Lett. 22, 666 (1969)
S.J.CHANG, S.MA : Phys. Rev. Lett. 22, 1334 (1969)
- [9] - Un exposé complet sur les états liés en électrodynamique quantique figure dans le livre de :
H.BETHE, E.SALPETER : "Quantum Mechanics of one and two electron atoms"
(Springer-Verlag 1969)
- [10] - M.ABARBANEL, C.ITZYKSON : Phys. Rev. Lett. 23, 53 (1969)
- [11] - J.SCHWINGER in Brandeis University 1960 Summer Institute in Theoretical Physics p. 223-372
- [12] - R.P.FEYNMAN, A.HIBBS : "Quantum Mechanics and Path Integrals"
(Mc. Graw and Hill 1966)
- [13] - J.WARD : Phys. Rev. 77, 293L, (1950); 78, 122L (1950)

- [14] - P.A.M.DIRAC : "Théorie du Positron" Rapport du 7ème Conseil Solvay de Physique, Structure et Propriétés des noyaux atomiques p.203 (1934)
V.S.WEISSKOPF : Kong. Dans. Vid. Selsk. Math-fys. Medd. XIV n°6 (1936)
W.HEISENBERG, H.EULER : ZS.f.Phys. 98, 714 (1936)

- [15] - J.SCHWINGER : "On gauge invariance and vacuum polarization"
Phys. Rev. 82, 664 (1951)
On trouvera également un exposé sur cette question dans le livre de
W.THIRRING "Principles of Quantum Electrodynamics" (Academic Press 1958)

- [16] - J.SCHWINGER : "The theory of quantized fields (V) Phys. Rev. 93, 615 (1954)

- [17] - G.MOLIERE : Z. Naturforsch. 2, 133 (1947)

- [18] - R.J.GLAUBER in "Lectures in Theoretical Physics" édité par E.Brittin
et L.G.Dunham (Interscience Publishers, Inc., New-York 1959) vol.I p.315

- [19] - D.S.SAXON, L.I.SCHIFF : Nuovo Cimento VI, 614 (1957)

- [20] - R.SUGAR, R.BLANKENBECLER : Phys. Rev. 183, 1387 (1969)

- [21] - R.P.FEYNMAN : Phys. Rev. 80, 440 (1950)

- [22] - R.P.FEYNMAN, J.A.WHEELER : Review of Modern Physics 21, 425 (1949)

- [23] - R.P.FEYNMAN : Phys. Rev. 76, 769 (1949)

- [24] - BATEMAN Manuscript project : Higher Transcendental functions
(tome 2) p.9 éq.(38)

- [25] - Le calcul est reproduit dans le livre de
L.LANDAU et E.LIFSHITZ : "Mécanique Quantique" (Editions de Moscou 1966)

- [26] - A.M.PERELOMOV, V.S.POPOV, M.V.TERENT'EV : Sov.Phys. JETP 23, 924 (1966)
24, 207 (1967)
L.V.KELDysh : Sov.Phys. JETP 20, 1307 (1965)
- [27] - F.A.BEREZIN : "The method of Second quantization" (Academic Press 1967)

Manuscrit reçu le 11 janvier 1971

Vu et approuvé
Paris, le 1 juillet 1970
Le Doyen de la Faculté des Sciences
de Paris

Marc ZAMANSKY

Vu
et Permis d'Imprimer
Le Recteur de l'Académie
de Paris

Robert MALLET

